MATHEMATIQUES

PROBLEME I 20 points

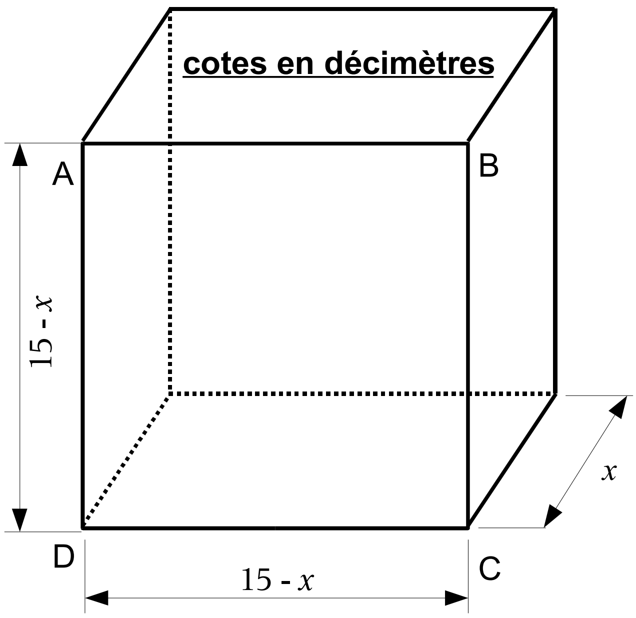
PARTIE A

I. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(x - 15)(x - 5) \geq 0$

II. Étudier les variations de la fonction f telle que $f(x) = x^3 - 30x^2 + 225x$ sur l'intervalle [0 ; 15].

1. Déterminer la dérivée f' de la fonction f.
2. Étudier le signe de la dérivée.
3. Établir le tableau de variation de la fonction f.
4. Compléter le tableau de valeurs et tracer la courbe C représentative de la fonction f en annexe 1 (Document réponse 1).
5. Tracer la droite D d'équation $y = 250$.

III. Un artisan veut réaliser un coffre ayant la forme d'un parallélépipède droit. Pour des raisons pratiques, si la profondeur est x alors sa largeur est $15 - x$ et sa hauteur est égale à sa largeur.



1. Exprimer en fonction de x le volume $V(x)$ du coffre et vérifier que $V(x) = x^3 - 30x^2 + 225x$.
   Entre quelles valeurs peut varier x ?

2. Utiliser les résultats de la question II pour répondre aux questions suivantes :

   a) L'artisan désire que le volume du coffre soit supérieur ou égal à 250 dm^3 et que sa profondeur soit un nombre entier de décimètres.
   Donner les différentes dimensions possibles du coffre.

   b) Pour quelles valeurs de x le volume sera-t-il maximal ? Quel est alors ce volume ?

PARTIE B

La façade avant est un carré de 10 dm sur 10 dm. Sur cette façade, l'artisan réalise un motif…
La face ABCD et une partie PMNQ du motif sont représentées en annexe 2. (document réponse 2).

1. L'arc de courbe MN représente une fonction *g* définie sur l'intervalle [1 ; 4] par $g(x) = \dfrac{a}{x+b}$
   Donner les coordonnées des points M et N.
   Déterminer les constantes a et b.

2.

   a) Sachant qu'une primitive de $\dfrac{1}{x}$ est $\ln x$
   Calculer $\int_1^4 \dfrac{4}{x}\,dx$.

   b) On admettra que : $g(x) = \dfrac{4}{x}$
   Déterminer à 1 cm^2 près l'aire de la surface OPMNQ.

3. Compléter sur le document réponse en annexe 2 le dessin sachant que le motif admet les droites (*x'x*) et (*y'y*) comme axe de symétrie.

   Calculer l'aire du motif réel de la façade du coffre.

4. Ce motif est en relief, on diminue la partie de la façade extérieure au motif sur une épaisseur de 3 mm. Calculer le volume de copeaux enlevés.

PROBLEME II 10 points

Un artisan souhaite, à partir d'une chute de contreplaqué triangulaire, découper une plaque rectangulaire de surface donnée.

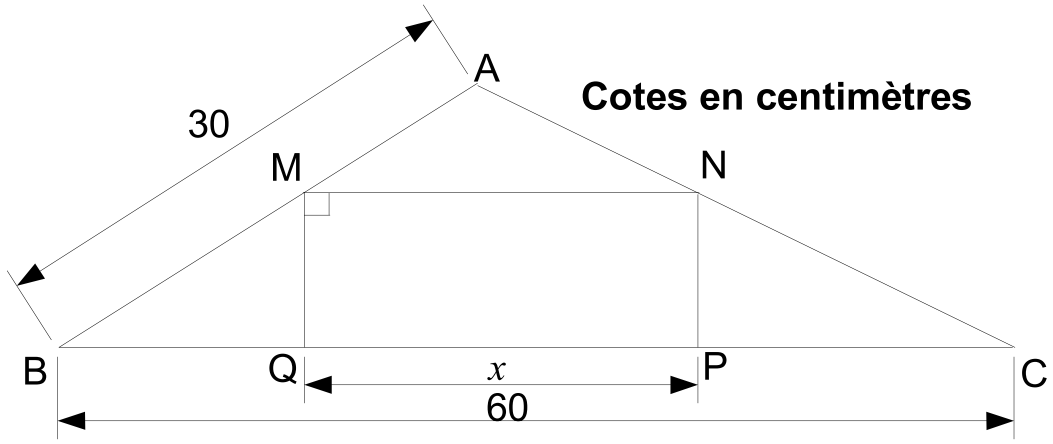
1. La plaque ABC triangulaire a pour côtés AB = 30 cm ; BC = 60 cm. AC = 37,2 cm.

   a) Représenter cette plaque à l'échelle 1/5 (laisser les constructions apparentes).

   b) Calculer la mesure de l'angle $\hat{B}$ à 1 ° près puis vérifier sur le dessin.

   c) Calculer l'aire de la plaque.

2. On découpe dans la plaque ABC une plaque rectangulaire MNPQ telle que MN = x ; (MN) // (BC) ; M $\in$ [AB] ; N $\in$ [AC]



   a) En utilisant le théorème de THALES exprimer AM en fonction de x.

   b) Exprimer BM en fonction de x. En déduire MQ.

   c) Montrer que l'aire de la plaque MNPQ est donnée, en fonction de x, par : $A(x) = -\frac{x^2}{4} + 15x.$

   d) Déterminer les dimensions possibles pour que l'aire de la plaque rectangulaire soit de 200 cm^2. Quel est le pourcentage de perte de cette découpe dans la chute de contreplaqué ?

SCIENCES PHYSIQUES

10 POINTS

Un système optique est constitué de deux lentilles convergentes L_1 et L_2 de même axe optique horizontal.

L'axe optique est orienté dans le sens de la lumière, le sens positif objet est vers le haut, les distances focales des lentilles sont f_1 = 30 mm et f_2 = 24 mm.

Un objet vertical AB de 10 mm de hauteur est placé à 10 mm devant le foyer principal objet F_1 de la lentille L_1, le point A est sur l'axe.

I.

1. Sur la figure donnée en annexe 3 (document réponse 3) :

   a) Placer les foyers F_1 et F'_1 de la lentille L_1, F_2 et F'_2 de la lentille L_2.

   b) Construire l'image A'B' de l'objet AB donnée par la lentille L_1 en terminant la construction des rayons lumineux de la figure.

2. En prenant le centre optique O_1 comme origine sur l'axe optique et en utilisant la formule : $\dfrac{1}{\overline{O_1A'}} - \dfrac{1}{\overline{O_1A}} = \dfrac{1}{\overline{O_1F'_1}}$, calculer $\overline{O_1A'}$ puis O_1A'.

3. En utilisant la relation : $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{O_1A'}}{\overline{O_1A}}$, calculer $\overline{A'B'}$ puis A'B' et le grandissement γ.

4. Donner les caractéristiques de l'image A'B' de l'objet AB donnée par la lentille L_1.

II.

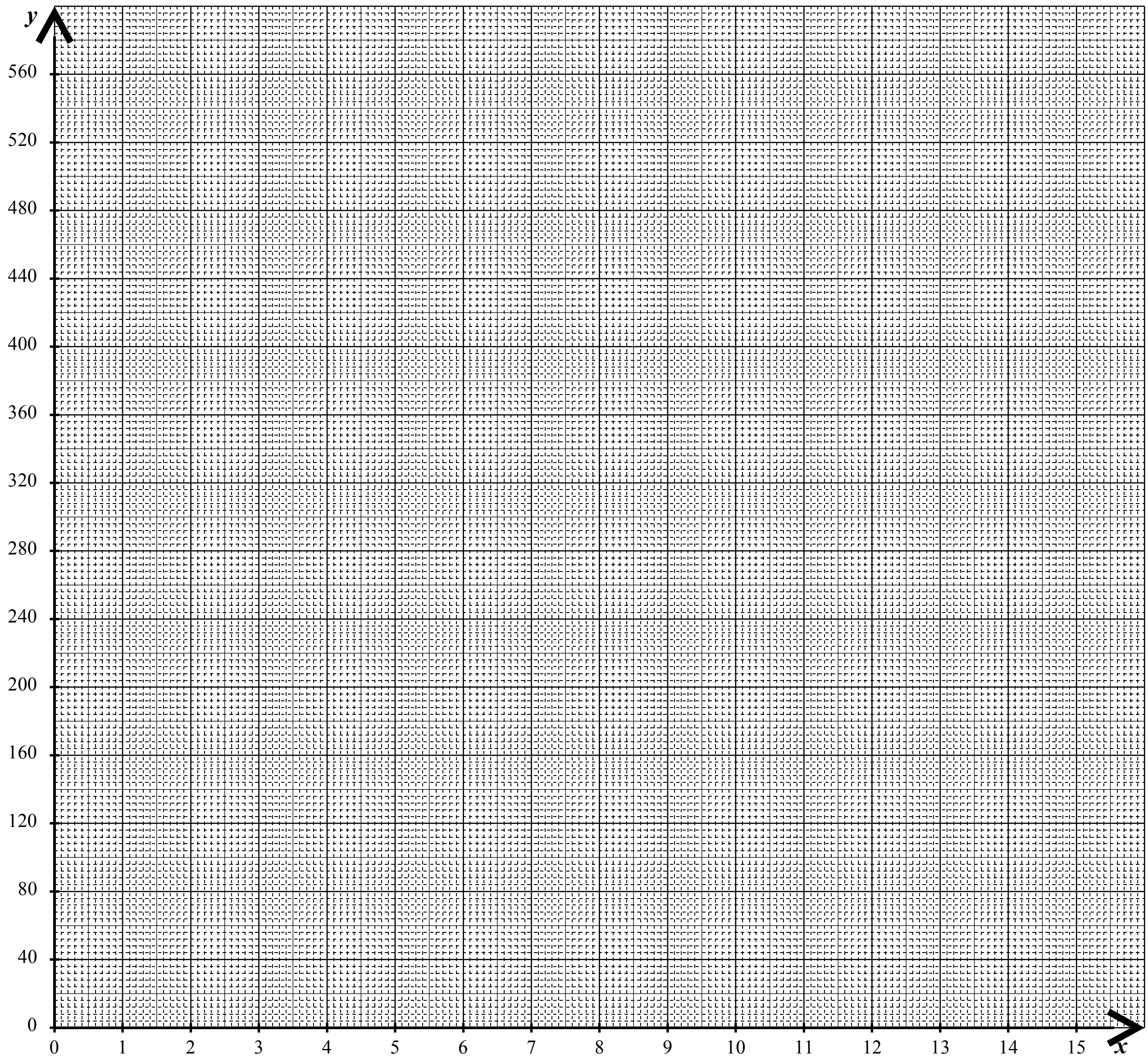
1. Pour la lentille L_2, en utilisant la formule : $c = \dfrac{1}{\overline{O_2F'_2}}$, calculer la vergence de la lentille L_2. L'unité de vergence est la dioptrie (δ), la distance focale est en mètres.

2. L'image de A'B' donnée par la lentille L_2 est une image réelle A''B'' de 20 mm de haut, droite, située à 40 mm à droite du centre optique.
   Placer l'image A''B'' sur la figure (annexe 3) et tracer trois rayons lumineux issus de B' qui permettent de l'obtenir.

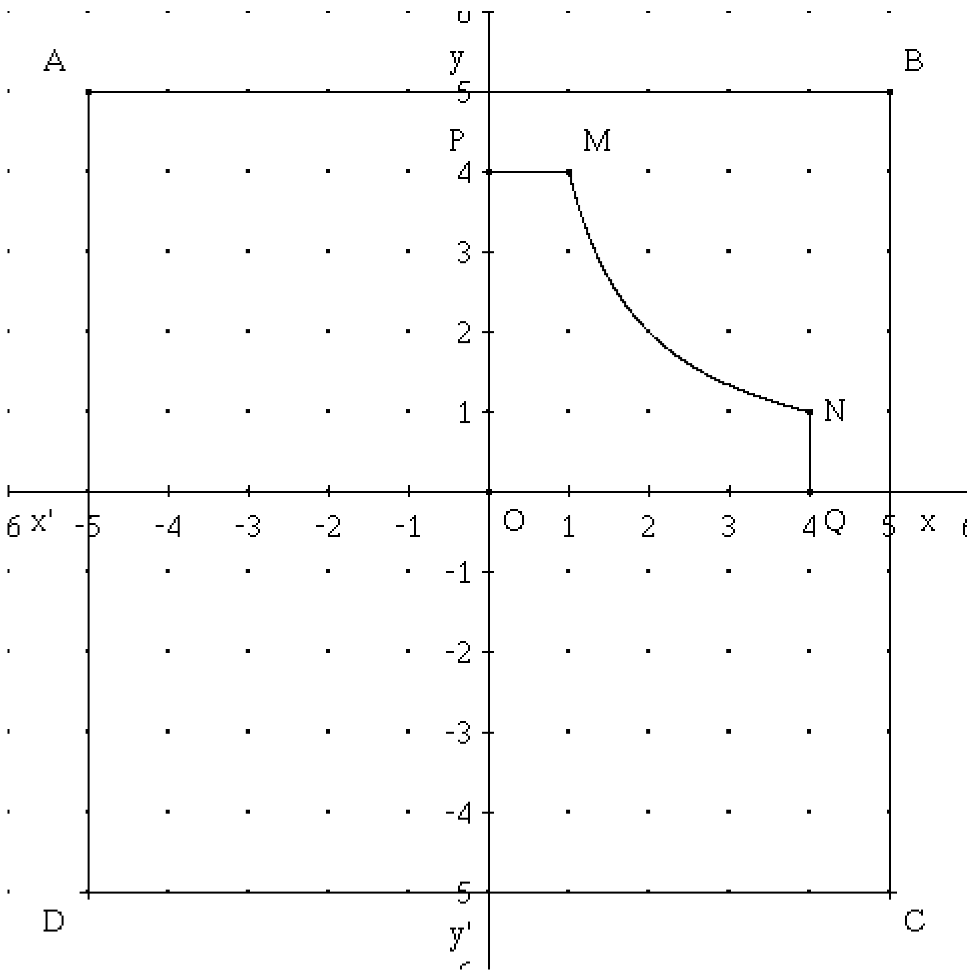
3. Calculer le grandissement de la lentille L_2, puis celui du système optique.

ANNEXE 1 : Document réponse 1
A rendre avec la copie

x	0	1	2	3	4	5	6	8	10	12	14	15
$f(x)$												

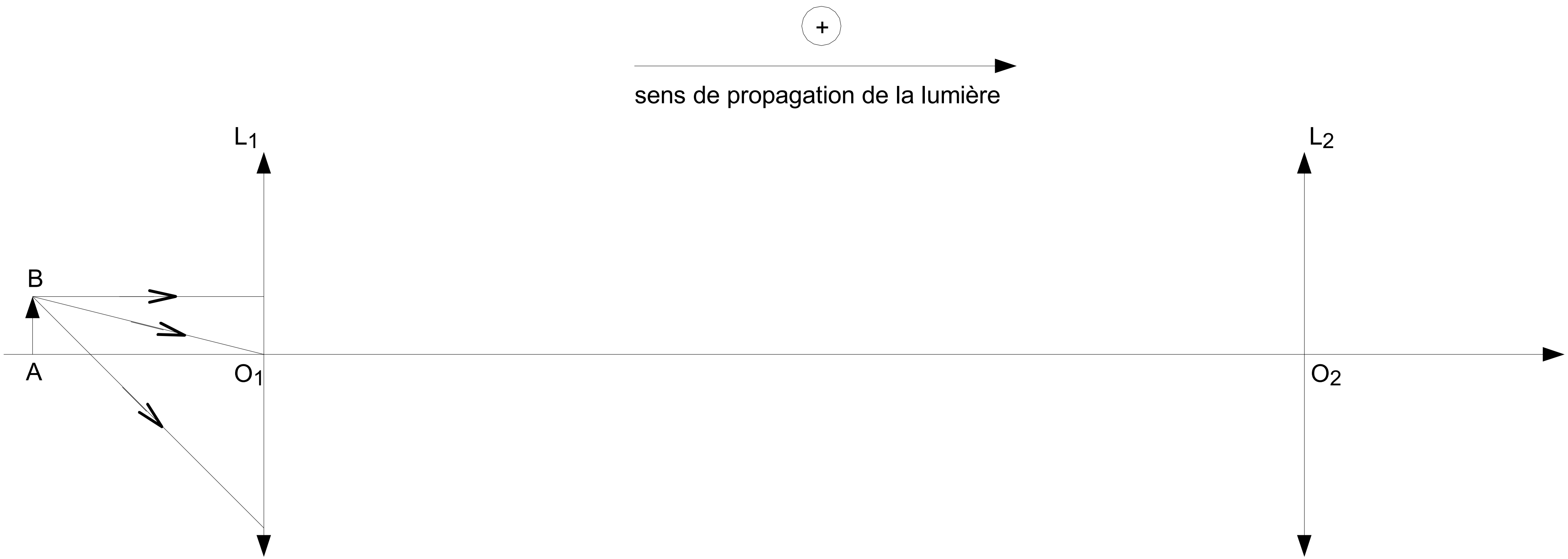


<u>ANNEXE 2 : Document réponse 2</u>
<u>A rendre avec la copie</u>



une unité graphique représente 1 dm

ANNEXE 3 : Document réponse à rendre avec la copie



FORMULAIRE

Fonction f	Dérivée f'
$f(x)$	$f'(x)$
$ax + b$	a
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
e^{ax}	$a\,e^{ax}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$

Equation du second degré :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$\Delta = b^2 - 4\,ac$

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, deux solutions réelles :

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, aucune solution réelle

si $\Delta \geq 0$, $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$

ELECTRICITE

- Loi d'Ohm relative au résistor :
  $U = R\,I$
- Loi des noeuds : $I = I_1 + I_2$
- Résistance équivalente à deux résistors
  en série : $R_e = R_1 + R_2$
  en parallèle : $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$
- Loi d'Ohm pour un générateur :
  $U = E - R\,I$
- Puissance électrique totale : $P_a = E\,I$
- Puissance utile : $P_u = U\,I$
- Rendement électrique : $r = \frac{P_u}{P_a}$

Relations métriques dans le triangle rectangle

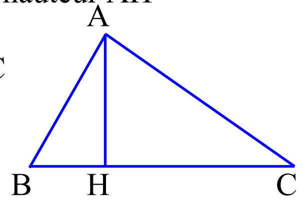
ABC rectangle en A, hauteur AH

$AB^2 + AC^2 = BC^2$

$AH \times BC = AB \times AC$

$AB^2 = BH \times BC$

$AH^2 = BH \times CH$

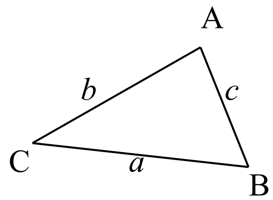


Résolution de triangle

R : rayon du cercle circonscrit.

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$



Aire du - triangle : $A = \frac{ab}{2}\sin\hat{C}$

- trapèze : $A = \frac{1}{2}(B+b)h$

- disque : $A = \pi R^2$

Calcul vectoriel dans le plan :

$\vec{v}\cdot\vec{v}' = xx' + yy'$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

si $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\vec{v}' \neq \vec{0}$:

$\vec{v}\cdot\vec{v}' = \|\vec{v}\| \times \|\vec{v}'\| \cos(\vec{v}, \vec{v}')$

$\vec{v}\cdot\vec{v}' = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{v}'$

OPTIQUE

Lois de DESCARTES

Loi de la réfraction : $n_1 \times \sin \hat{\imath}_1 = n_2 \sin \hat{\imath}_2$

Loi de la réflexion : $i = r$

ACOUSTIQUE

Période : $T = \frac{1}{f}$

Longueur d'onde : $\lambda = c\,T$