

11. Géométrie dans l'espace

I. Repère orthonormal de l'espace : point et vecteur

Soit le cube ABCDEFG de 1,5 cm de côté, figure 1.

1. Déterminer les vecteurs somme.

$$\vec{OA} + \vec{OC} = \dots\dots\dots$$

$$\vec{OB} + \vec{OG} = \dots\dots\dots$$

2. En déduire l'égalité vectorielle :

$$\vec{OE} = \vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OG}$$

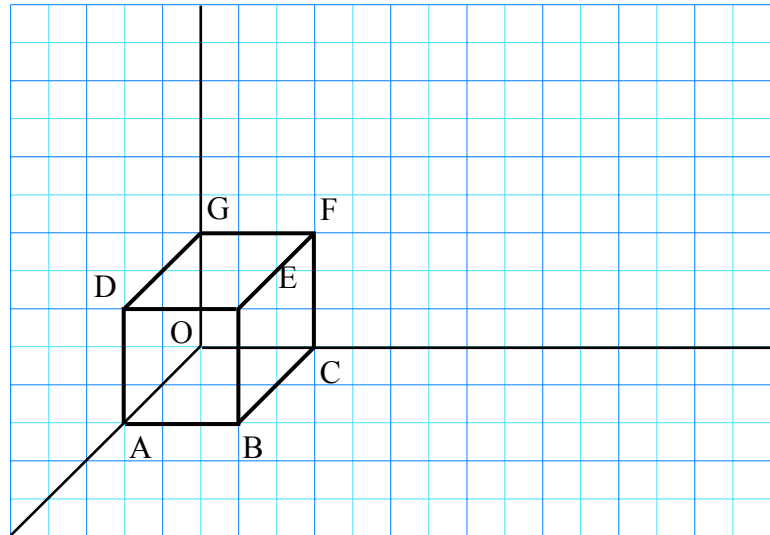


Fig. 1

3. Construire les points m_1, m_2, m_3, m et M tels que :

$$\vec{Om_1} = 2 \vec{OA}, \vec{Om_2} = 5 \vec{OC}, \vec{Om_3} = 3 \vec{OG}, \vec{Om} = \vec{Om_1} + \vec{Om_2} \text{ et } \vec{OM} = \vec{Om} + \vec{Om_3}.$$

4. En déduire l'égalité vectorielle : $\vec{OM} = 2 \vec{OA} + 5 \vec{OC} + 3 \vec{OG}$

5. Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère **orthonormal de l'espace** si O est un point de l'espace et $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs deux à deux orthogonaux et de norme égale à une unité de longueur.

Pour tout point M de l'espace dans lequel on a défini un repère **orthonormal** $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, il existe un unique triplet de nombres réels (x, y, z) appelé coordonnées de M, tel que :

$$\vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}; x \text{ est l'abscisse, } y \text{ est l'ordonnée et } z \text{ la cote du point M.}$$

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un seul point M tel que $\vec{u} = \vec{OM}$ dont le triplet (x, y, z) désigne aussi les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

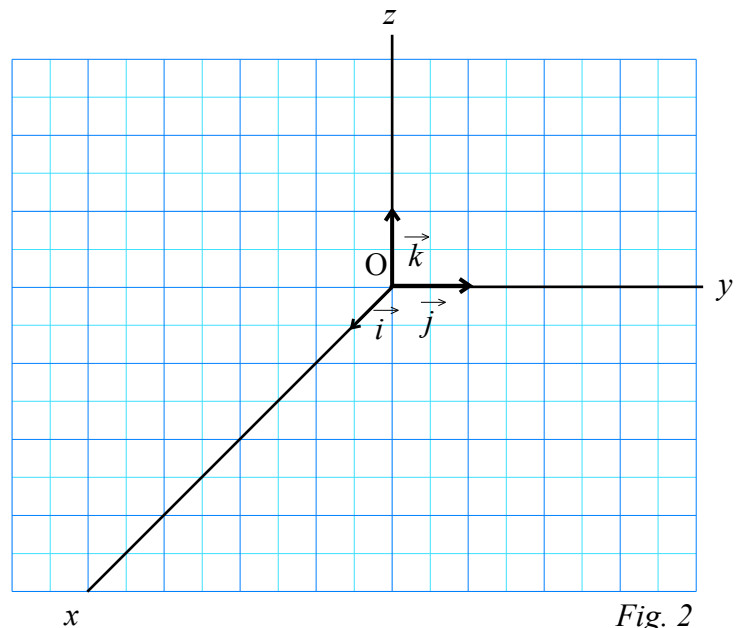
Si $\vec{OA} = \vec{i}, \vec{OC} = \vec{j}, \vec{OG} = \vec{k}$, quelles sont alors les coordonnées de M ?

6. Que représente les points m_1, m_2, m_3 pour le point M ?

11. Géométrie dans l'espace

7. Représenter les points M et N tels que : $M(5 ; -2 ; 3)$; $N(2 ; 3 ; -1)$ dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, figure 2.

a) Tracer le vecteur $\vec{MN}$.



b) Donner les coordonnées des vecteurs $\vec{OM}$ et $\vec{ON}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$

.....

.....

.....

c) Donner l'expression du vecteur $\vec{MN}$ en fonction des vecteurs $\vec{OM}$ et $\vec{ON}$

.....

.....

d) En déduire l'expression du vecteur $\vec{MN}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$

.....

.....

e) On appelle m et n les projections orthogonales respectives de M et N dans le plan (xOy) . Tracer, sur la figure 2, dans le plan (xOy) un triangle rectangle d'hypoténuse $[mn]$ et dans un plan perpendiculaire au plan (xOy) un triangle rectangle d'hypoténuse $[MN]$.

f) Retrouver graphiquement les coordonnées du vecteur $\vec{MN}$.

.....

11. Géométrie dans l'espace

II. Extension à l'espace du calcul vectoriel

Le calcul vectoriel vu dans le plan s'étend aux vecteurs de l'espace.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère dans l'espace.

Soit $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{u'}(x', y', z')$ deux vecteurs donnés de l'espace.

Déterminer :

a) les coordonnées du vecteur somme : $\vec{u} + \vec{u'}$

b) les coordonnées du vecteur $\alpha \vec{u}$ pour α nombre réel : $\alpha \vec{u}$

c) la condition de colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{u'}$: $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ colinéaires si

d) la définition du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u'}$ =

e) la condition de nullité du produit scalaire, $\vec{u} \cdot \vec{u'} = 0$ si

Pour $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère **orthonormal** de l'espace, écrire :

f) l'expression analytique du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u'}$ =

g) la norme du vecteur $\vec{u}$: $\|\vec{u}\|$ =

1. Soit le cube ABCDEFGH représenté dans un repère orthonormal direct $(D, \vec{DA}, \vec{DC}, \vec{DE})$.

On appelle I le milieu du segment [FG], (figure 3).

a) Donner les coordonnées des points A, H et I

.....

b) Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AI}$ et $\vec{AH}$

.....

c) Calculer le produit scalaire $\vec{AI} \cdot \vec{AH}$

.....

d) Calculer la norme des vecteurs $\vec{AI}$ et $\vec{AH}$

.....

e) En déduire la mesure de l'angle entre les vecteurs $\vec{AI}$ et $\vec{AH}$

.....

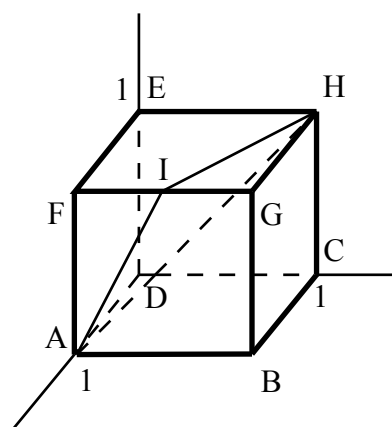
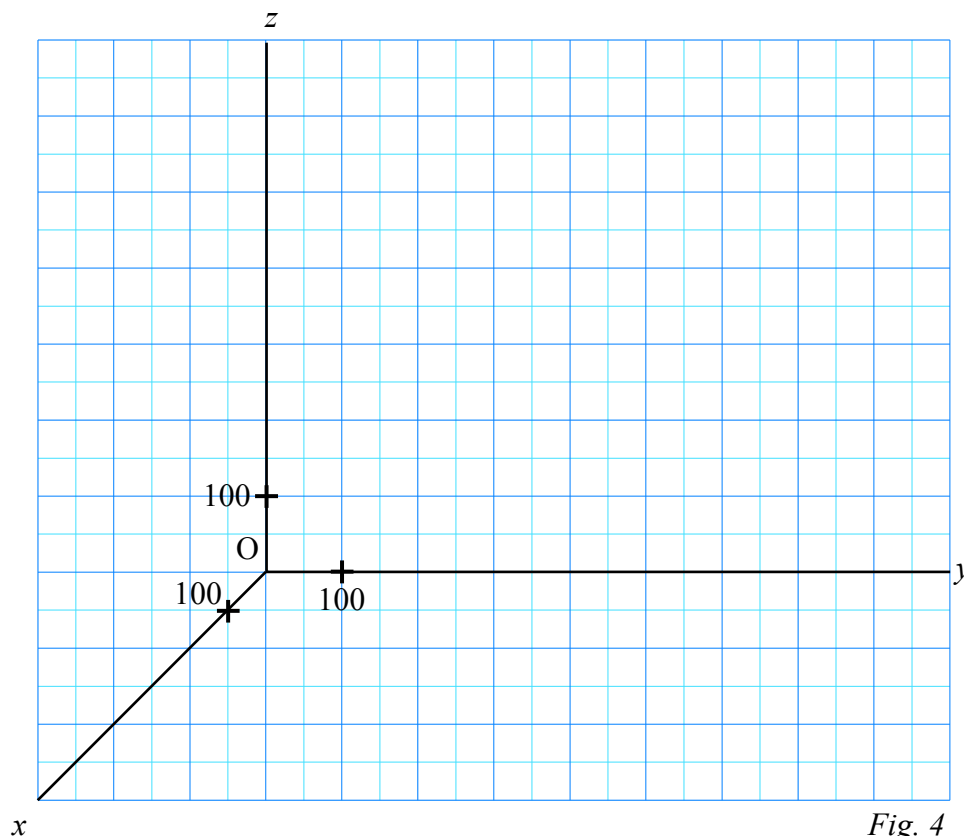


Fig. 3

11. Géométrie dans l'espace

2. Soit un repère orthonormal de l'espace servant à représenter l'activité d'un robot. Pour réaliser une opération sur une structure, le robot doit travailler dans un plan (P) contenant quatre points : A (100 ; 400 ; 500) ; B (500 ; 400 ; 350) ; D (100 ; 800 ; 650) et C (x ; y ; k).

a) Représenter, figure 4, les points A, B et D



b) Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$

.....

.....

c) Calculer les longueurs AB et AD arrondie au mm.

.....

.....

d) Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$. En déduire l'angle entre les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$, valeur arrondie au degré.

.....

.....

.....

.....

11. Géométrie dans l'espace

e) Déterminer les coordonnées du point C tels que : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Placer C, figure 4.

.....

.....

.....

.....

f) En déduire la nature du quadrilatère ABCD ?

.....

g) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ comme somme de 2 vecteurs ; donner leurs coordonnées.

.....

.....

.....

h) En déduire les distances AC et BD et l'aire du losange ABCD.

.....

.....

.....

i) Déterminer les coordonnées des points A', B', C', D', projetés orthogonaux sur le plan (xOy), respectivement des points A, B, C et D. Construire le quadrilatère A'B'C'D', figure 4.

.....

j) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A'D'}$ et $\overrightarrow{B'C'}$. En déduire les distances A'B', A'D' et le produit scalaire $\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'D'}$.

.....

.....

.....

.....

.....

k) En déduire la nature du quadrilatère A'B'C'D' puis son aire

.....

.....

l) Calculer le quotient de l'aire de ABCD et de celle de A'B'C'D', appelé rapport de projection orthogonale

11. Géométrie dans l'espace

3. On considère un cube ABCDEFGH d'arête 10, représenté à l'échelle 0,5 sur la figure 5.

a) Placer, figure 5, les points I, J et K respectivement sur les arêtes [AB], [AD] et [AE] et tels que : $IB = 7$, $JD = 5$ et $KE = 1$. Tracer le triangle IJK.

b) 1. Quelle est la position de la droite (AK) par rapport au plan (AIJ) ?

.....

2. En déduire la hauteur de la pyramide AIJK et son volume.

.....

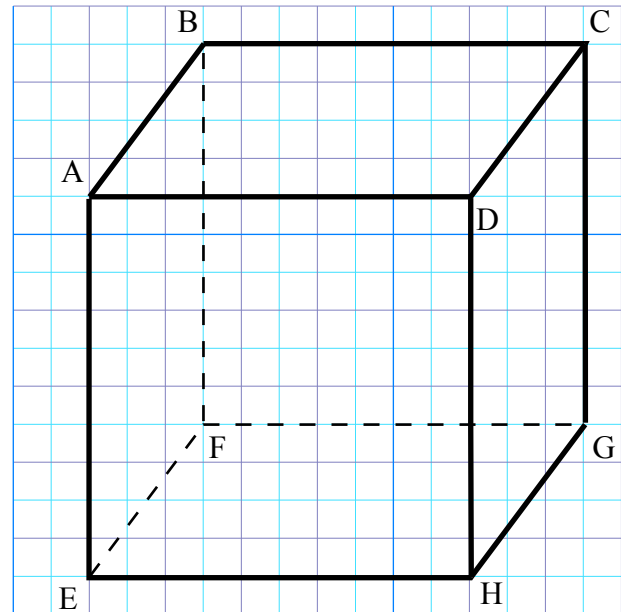


Fig. 5

c) 1. Calculer les valeurs exactes de IJ, KI et KJ

.....

2. En appliquant la formule du triangle quelconque dans IKJ, calculer $\cos \widehat{IKJ}$ et en déduire $\widehat{IKJ}$

.....

d) Soit le repère orthonormal $(F, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\vec{FE} = 10\vec{i}$; $\vec{FG} = 10\vec{j}$; $\vec{FB} = 10\vec{k}$.

1. Donner les coordonnées de I, J et K

.....

2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{KJ}$ et $\vec{KI}$. En déduire le produit scalaire $\vec{KJ} \cdot \vec{KI}$

.....

11. Géométrie dans l'espace

3. Calculer la norme des vecteurs $\vec{KJ}$ et $\vec{KI}$.

.....

.....

4. En utilisant le produit scalaire $\vec{KJ} \times \vec{KI}$, calculer $\cos(\vec{KJ}; \vec{KI})$ et en déduire l'angle $(\vec{KJ}; \vec{KI})$

.....

.....

.....

.....

.....

III. Application

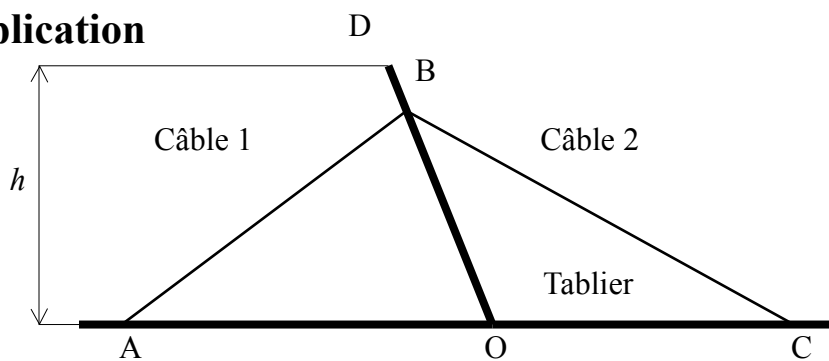


Fig. 6

Soit le pont à haubans schématisé figure 6.

Le câble 1 est fixé au mât OD en B et sur le tablier en A ; le câble 2 est fixé au mât OD en B et sur le tablier en C.

a) Sachant que $\widehat{AOB} = 74^\circ$ et $h = 37$ m, calculer la longueur OD.

.....

.....

b) Sachant que : $OA = 62,04$ m et $OB = 33$ m, calculer la longueur du câble 1 et la mesure de l'angle $\widehat{OAB}$.

.....

.....

.....

.....

b) Sachant que : $\widehat{OCB} = 18,5^\circ$, calculer la longueur du câble 2.

.....