10. Suites arithmétiques & géométriques

I. Suites arithmétiques

Soit U une suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison r

1. Exprimer u_2, u_3, u_4 et u_5 en fonction de u_1 : chaque terme, autre que le premier, se déduit du précédent en lui ajoutant la raison

u_2 = ... u_3 = ...

u_4 = ... u_5 = ...

2. Généraliser et exprimer u_n en fonction de u_1, r et n

u_n = ...

3. Calculer u_{20} et u_{40} sachant que $u_1 = -0,5$ et $r = 3$

u_{20} = ... u_{40} = ...

4. Calculer u_{30} sachant que $u_1 = 4$ et $r = -0,5$

u_{30} = ...

Soit S_n la somme des n premiers termes de la suite arithmétique U de premier terme u_1 et de raison r. On pose : $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ... + u_{n-3} + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$ (1)

Cette somme peut aussi s'écrire en commençant par u_n

$S_n = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-3} + ... + u_4 + u_3 + u_2 + u_1$ (2)

5. Additionner les égalités (1) et (2) ; compléter :

$2\,S_n = (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1})$ + (..........+..........) + (..........+..........) + ...

+ (..........+..........) + (..........+..........) + (..........+..........) + (..........+..........)

6. Exprimer chaque parenthèse en fonction de u_1 et u_n.

$(u_2 + u_{n-1})$ = ...

$(u_3 + u_{n-2})$ = ...

(......+......) = ...

(......+......) = ...

7. Que devient la relation obtenue à la question 5 ?

$2\,S_n$ = ...

8. Exprimer S_n en fonction de u_1, u_n et n

S_n = ...

9. Soit U la suite arithmétique de premier terme $u_1 = -2$ et de raison $r = 3$. Calculer S_{50}

$S_{50} = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{50}$

S_{50} = ...

....

....

10. Suites arithmétiques & géométriques

II. Suites géométriques

Soit V une suite géométrique de premier terme v_1 et de raison q

1. Exprimer v_2, v_3, v_4 et v_5 en fonction de v_1 : chaque terme, autre que le premier, se déduit du précédent en le multipliant par la raison

$v_2 =$ .... $v_3 =$ ....

$v_4 =$ .... $v_5 =$ ....

2. Généraliser et exprimer v_n en fonction de v_1, q et n

$\boxed{v_n = \text{.....................}}$

3. Calculer v_{12} sachant que $v_1 =$ 1,5 et $q = 2$

$v_{12} =$ ....

4. Calculer v_{16} sachant que $v_1 =$ 5 et $q = -2$

$v_{16} =$ ....

Soit S_n la somme des n premiers termes de la suite géométrique V de premier terme v_1 et de raison q. On pose : $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + ... + v_{n-3} + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n$ (1)

5. Que devient cette égalité si on multilpie chaque membre par la raison q ?

$q\ S_n =$ .... (2)

6. On retranche membre à membre les égalités (1) et (2) ; compléter :

$S_n - q\ S_n = (v_1 - q\ v_1) + (v_2 - \text{......}) + (\text{......} - \text{......}) + (\text{......} - \text{......}) + ...$

$+ (\text{......} - \text{......}) + (\text{......} - \text{......}) + (\text{......} - \text{......}) + (\text{......} - \text{......})$

7. On simplifie, compléter

$S_n - q\ S_n = (v_1 - v_2) + (v_2 - \text{......}) + (\text{......} - \text{......}) + (\text{......} - \text{......}) + ...$

$+ (\text{......} - \text{......}) + (\text{......} - \text{......}) + (\text{......} - \text{......}) + (\text{......} - q\ v_n)$

8. Simplifier l'égalité précédente :

$S_n - q\ S_n = v_1 -$ ......

9. Exprimer S_n en fonction de v_1, q et n

$S_n\ (\text{...} - \text{...}) = v_1 -$ .... $= v_1\ (\text{...} - \text{...})$

$$\boxed{S_n = v_1 \frac{(\text{...} - \text{.....})}{(\text{...} - \text{.....})}}$$

10. Soit V la suite géométrique de premier terme $v_1 = 1{,}5$ et de raison $q = 2$. Calculer S_{20}

$S_{20} = v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_{20}$ $\qquad S_{20} = \text{....} \dfrac{(\text{...} - \text{.....})}{(\text{...} - \text{.....})} =$ ....

11. Soit V la suite géométrique de premier terme $v_1 = 0{,}5$ et de raison $q = -1$. Calculer S_{20}

$S_{20} = v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_{20}$ $\qquad S_{20} = \text{....} \dfrac{(\text{...} - \text{.....})}{(\text{...} - \text{.....})} =$ ....

10. Suites arithmétiques & géométriques

III. Exemple de coût d'un forage

Les tarifs appliqués par une entreprise de forage sont les suivants :
le premier mètre creusé coûte 400 €, le second mètre creusé coûte 520 €, chaque mètre supplémentaire coûte 120 € de plus que le précédent.
On désigne par u_n le prix du $n^{\text{ième}}$ mètre creusé.

1. Calculer u_3, u_4, u_5 et u_6.

u_3 = ... u_4 = ...

u_5 = ... u_6 = ...

2. Quelle est la nature de la suite dont u_1, u_2, u_3, ... u_n sont des termes consécutifs ?

....

3. Exprimer u_n en fonction de n

u_n = ...

4. Calculer le prix du quinzième mètre creusé

....

5. Calculer le coût d'un forage de 20 mètres.

....

....

IV. Exemple de calcul de prêt

Une personne bénéficie d'un prêt progressif pour rembourser son appartement. Elle rembourse son emprunt en 12 échéances annuelles, chacune d'elles étant égales à la précédente augmentée de 10 %.

Soit e_1 le montant de la première échéance et e_n le montant de la $n^{\text{ième}}$ échéance ($1 \leqslant n \leqslant 12$)

1. Exprimer e_2, e_3, e_4, ..., e_{12} en fonction de e_1.

e_2 = ... e_3 = ...

e_4 = ... e_{12} = ...

2. Quelle est la nature de la suite dont e_1, e_2, e_3, ... e_{12} sont des termes consécutifs ?

....

3. En déduire une expression de $e_1 + e_2 + e_3 + ... + e_{12}$ en fonction de e_1

....

4. Calculer le montant de la première échéance sachant que le montant total du prêt est de 261 765 €

....

....

....

V. Exemple de placement à intérêts composés

Un capital de 18 000 € est placé *n* années à un taux annuel de 3,5 %. La capitalisation des intérêts est annuelle. Combien de temps doit-on placer ce capital pour qu'au bout des *n* années on obtienne une valeur acquise de 28 151,21 € ?

VI. Exemple de production

La production d'une entreprise de pièces détachées automobile augmente de 3 % chaque année. Déterminer la production de cette entreprise, la première année, sachant qu'en 10 ans, elle a produit 28 660 pièces détachées.

VII. Exemple d'acoustique

Une source émet un son de niveau d'intensité sonore 100 dB. On appelle u_n l'intensité du son mesurée après la traversée de *n* plaques d'isolation phonique, sachant que chaque plaque d'isolation absorbe 10 % du niveau d'intensité sonore qui lui parvient.

a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 .

b) Déterminer une relation entre u_{n+1} et u_n et exprimer u_n en fonction de u_1 et n.

c) Déterminer le niveau d'intensité sonore obtenu avec 10 plaques d'isolation phonique.

d) Déterminer le nombre de plaques d'isolation phonique utilisée si le niveau sonore obtenu est de 25,4 dB.