8. Primitives d'une fonction et intégrales

I- Usage du tableau des dérivées

Compléter les tableaux 1 et 2 en précisant le numéro des lignes utilisées.

Tableau 1

N°	$f(x)$	$f'(x)$
....	$2x - 3$	....
....	$3x^2$	....
....	$\frac{4}{x}$	....
....	$3 \ln x$	....

Tableau 2

N°	$f(x)$	$f'(x)$
....	$5\,e^x$	....
....	$6\,e^{2x+3}$	....
....	$2x^3 - 5x^2$	....
....	$2 \sin x - 3 \cos x$	....

	Fonction f $f(x)$	Dérivée f' $f'(x)$
1	$ax + b$	a
2	x^2	$2x$
3	x^3	$3x^2$
4	$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
5	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
6	e^x	e^x
7	e^{ax+b}	$a\,e^{ax+b}$
8	$\sin x$	$\cos x$
9	$\cos x$	$-\sin x$
10	$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
11	$k \times u(x)$	$k \times u'(x)$

II- Calcul d'aires simples

1. Soit le trapèze ABCD donné dans un repère orthonormal d'unité graphique le centimètre. Calculer son aire A.

....

....

....

....

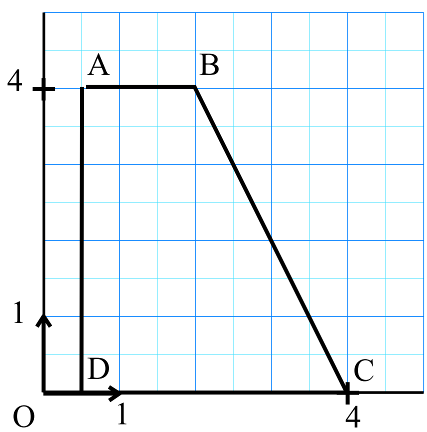


Fig. 1

8. Primitives d'une fonction et intégrales

2. La représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 4] par $f(x) = 1{,}4\,x$ est donnée dans un repère orthonormal d'unités graphique le centimètre.

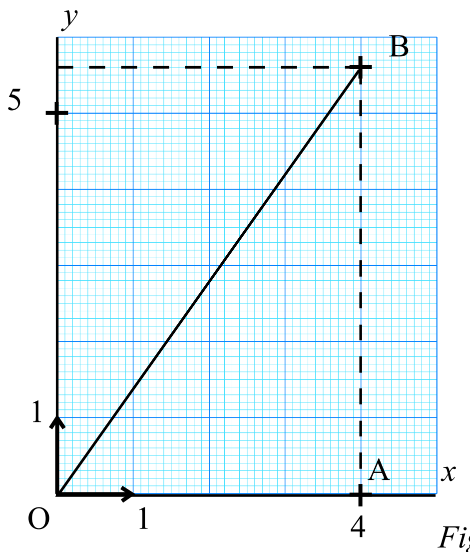


Fig. 2

a) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABO.

b) Déterminer la fonction F' dérivée de la fonction F définie sur l'intervalle I = [0 ; 4] par $F(x) = 0{,}7\,x^2$.

Comparer $F'(x)$ et $f(x)$.

c) Calculer $F(4) - F(0)$. Comparer $\mathscr{A}$ et $F(4) - F(0)$.

d) Quel est le signe de $f(x)$ pour des valeurs de x dans l'intervalle [0 ; 4] ?

Que peut-on conclure pour f ?

III- Primitives de fonctions monômes

F est une **primitive** de f sur l'intervalle I si, pour toute valeur x de cet intervalle I,

$$\boldsymbol{F'(x) = f(x)}.$$

1. Reprendre la réponse à la question 2. b) et que dire de F pour f ?

2. Considérons les fonctions F_1, F_2 et F_3 définie sur R telle que :

$F_1(x) = x^2$; $F_2(x) = x^2 + 5$ et $F_3(x) = x^2 - 4$.

a) Déterminer les dérivées de ces trois fonctions.

b) Que représentent les fonctions F_1, F_2 et F_3 pour la fonction f définie sur R par $f(x) = 2x$? Justifier.

....

c) Déterminer la dérivée de la fonction F définie sur R par $F(x) = x^2 + k$ où k est une constante arbiraire et conclure.

....

....

3. Considérons la fonction F définie sur R telle que $F(x) = x^3$.

a) Déterminer la dérivée F' de cette fonction.

....

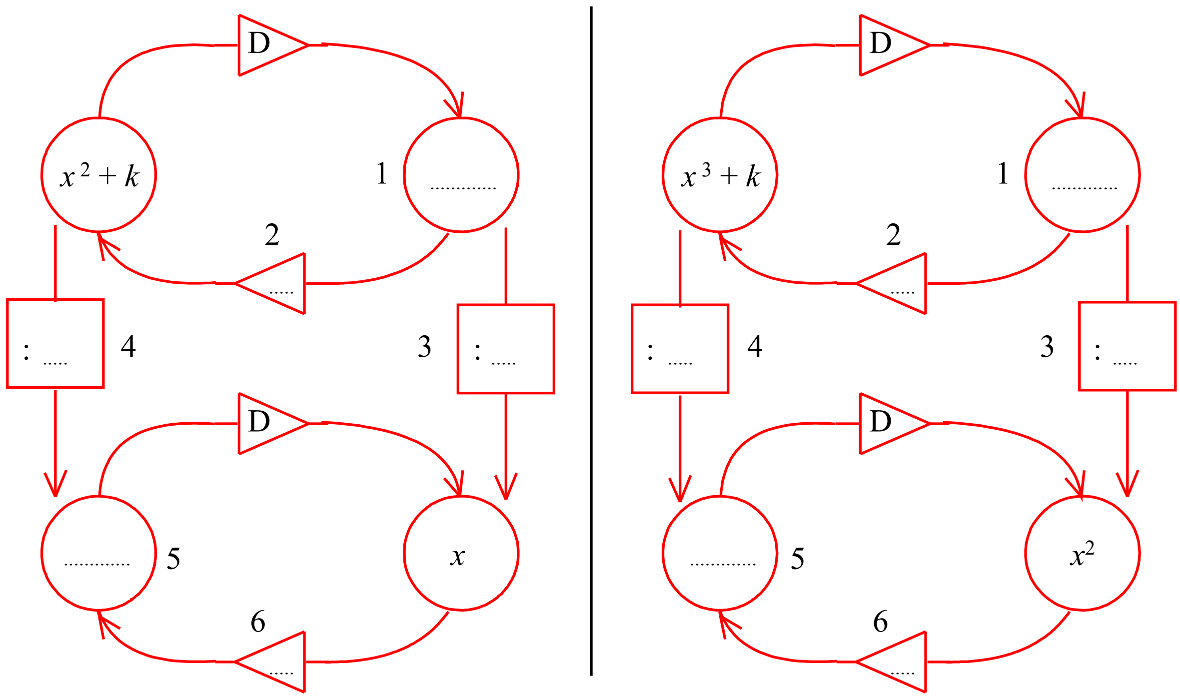
b) En déduire la forme des primitives de la fonction f définie sur R, telle que $f(x) = 3x^2$.

....

c) Compléter les schémas suivants en utilisant les opérateurs fonctionnels

D et P

qui donnent respectivement la dérivée et les primitives d'une fonction (respecter l'ordre 1, ... 6 et indiquer l'opération adéquate en 3 et 4).



d) Conclure en complétant les schémas suivants :

$x \xrightarrow{P}$ .... ; $x^2 \xrightarrow{P}$ .... ; pour $x > 0$; $\dfrac{1}{x} \xrightarrow{P}$ ....

8. Primitives d'une fonction et intégrales

IV- Lecture inverse du tableau des dérivées

1. Quand une fonction f est donnée, à quelle colonne du tableau des fonctions et des dérivées associées doit-on se reférer pour obtenir ses primitives ?

....

....

2. Primitives de $u + v$ et de $a\,u$

Soit u et v, deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Décrire comment on obtient les primitives d'une somme de fonctions ou d'un produit d'une fonction par une constante.

$u' + v' \xrightarrow{P}$ .... $\qquad\qquad$ $a\,u' \xrightarrow{P}$ ....

3. Compléter le tableau 3 et préciser la ou les lignes de référence.

Tableau 3

fonction f	N° de lignes	primitives de f
3	....	....
x	....	....
$5x + 3$	....	....
-6	....	....
$7x^2 - 6$	....	....
$\frac{1}{x}$ $(x > 0)$	....	....
$\frac{3}{x} + 5$ $(x > 0)$	....	....
e^{2x-3}	....	....
$3e^{2x-3} + 5$	....	....
$-\frac{2}{x^2} + 4$	....	....
$\frac{5}{x^2} - 3x$	....	....
$3\cos x - 2\sin x$	....	....

8. Primitives d'une fonction et intégrales

V- Calcul d'intégrales

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle I = [a ; b] et F une de ses primitives.

Le nombre ***F* (*b*) - *F* (*a*)** est appelé **intégrale** de a à b de la fonction f.

On notera : $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

où a est la borne inférieure et b la borne supérieure ; dx indique la variable.

A partir du II. 2. c) compléter :

$\int_0^4 f(x)\,dx = [F(x)]_0^4 = F(4) - F(0)$ est ....

$\int_0^4$ .... dx = [..............]$_0^4$ = ...

2. Considérons la fonction F définie sur R telle que $F(x) = 2x^3 - 4x$

a) Déterminer la dérivée F' de cette fonction. Que représente F pour la fonction f définie sur R par $f(x) = 6x^2 - 4$?

....

b) Les propriétés suivantes sont admises :

$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$	$\int_a^b k f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx$

Calculer le nombre A = $F(3) - F(1)$.

....

Quelle autre notation peut-on utiliser pour A ?

....

3. Considérons les fonctions F_1 et F_2 définies sur R telle que $F_1(x) = 2x^3 + 4x^2$ et $F_2(x) = 2x^3 + 4x^2 + k$; (k est une constante).

a) Déterminer les dérivées F_1' et F_2' de ces fonctions.

....

....

b) Calculer A = $\int_{-1}^3 (6x^2 + 8x)\,dx$ avec F_1 puis B avec F_2.

....

....

....

....

c) Conclure en donnant la méthode de calcul de $\int_a^b f(x)\,dx$

....

8. Primitives d'une fonction et intégrales

VI- Calcul d'aires

1. A partir du dessin (*Fig. 1*) du trapèze ABCD, préciser les équations des droites support des segments [AB] et [BC] parmi : $f(x) = -2x + 8$ et $g(x) = 4$ et donner l'intervalle sur lequel elles sont définies.

→ Pour [AB] : ....

Pour [BC] : ....

2. Calculer $A = \int_{0,5}^{2} g(x)\,dx$ et $B = \int_{2}^{4} f(x)\,dx$. Comparer A + B à l'aire A du trapèze. Conclure.

....

....

....

....

....

3. Soit la fonction f définie sur [0 ; 7] par $f(x) = x^2$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous, (Fig. 3).

a) Délimiter la partie E du plan, ensemble des points M(x ; y) tels que : $3 \leqslant x \leqslant 7$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$

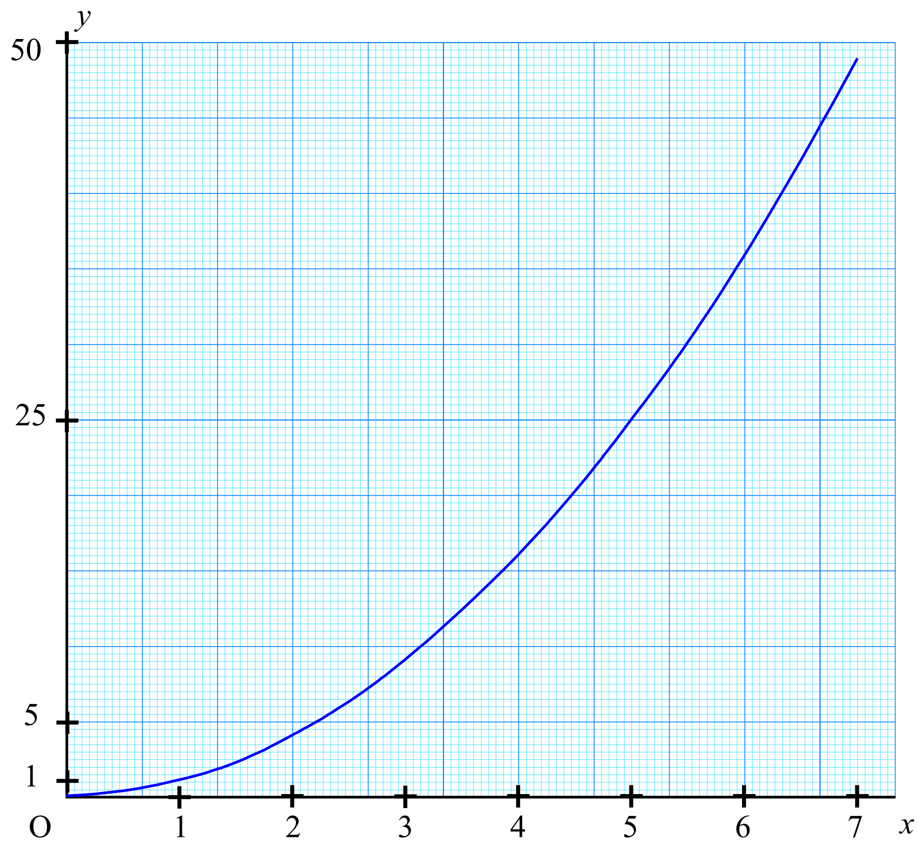


Fig. 3

→ b) Hachurer en vert tous les carrés **entiers** de 0,5 de côté situés dans la partie E.

c) Hachurer en rouge tous les carrés **entiers** de 0,5 de côté coupés par C_f.

d) calculer, arrondies à 0,01, l'aire A_1 associée aux carrés verts.

....

d) calculer, arrondies à 0,01, l'aire A_2 associée aux carrés verts et rouges.

....

e) calculer, l'aire moyenne A_{moy} de A_1 et A_2.

....

f) donner un encadrement de l'aire moyenne A de la partie E.

....

g) calculer le nombre $I = \int_3^7 x^2\, dx$.

....

....

g) calculer l'unité d'aire, notée *ua*, qui est le produit des unités graphiques sur chacun des axes. En déduire le produit I x *ua*.

....

h) comparer I x *ua* et A_{moy}. Conclure

....

....

....

8. Primitives d'une fonction et intégrales

VII- Exemple de la loi de Van't Hoff

1. L'étude mathématique de la loi conduit à considérer la fonction f définie sur $[5 ; 7]$ par $f(x) = \dfrac{70}{x^2}$. Compléter le tableau de valeurs arrondies à 0,01.

x	5	5,5	6	6,5	7
$f(x)$	....				

2. Tracer la courbe représentative C_f dans un repère orthogonal d'unités graphiques : en abscisses 1,5 ; en ordonnées 2,5.

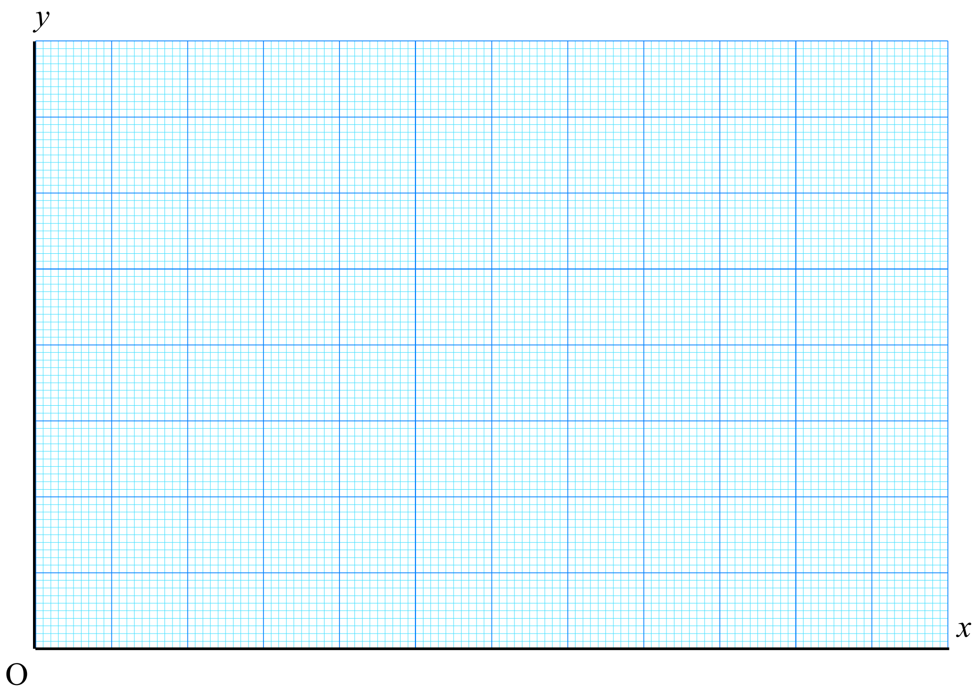


Fig. 4

3. Déterminer la constante k telle que la fonction $F(x) = \dfrac{-70}{x} + k$ vérifie $F(7) = -10$.

....

4. Calculer la dérivée $F'(x)$ et conclure.

....

5. Calculer le nombre $\mathrm{I} = \displaystyle\int_5^7 f(x)\, dx$.

....

6. Que représente le nombre J = I x 1,5 x 2,5 ?

....

....