

## 7. Dérivation (2)

### I- Sens de variation d'une fonction

**1. Rappel :** Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et soit  $f'$  sa fonction dérivée.

Rappeler les propriétés qui lient le signe de  $f'(x)$  et le sens de variation de  $f$  sur  $I$ .

.....

.....

.....

**2.** Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $I = [-5 ; 5]$  par :  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 5$ .

Etudier le sens de variation de  $f$  sur  $I$ .

a) expression de sa dérivée  $f'(x)$  :

.....

b) recherche de (ou des) valeur(s) de  $x$  qui annule cette dérivée.

.....

.....

.....

c) recherche du signe de cette dérivée.

.....

.....

.....

.....

.....

d) tableau de variation de la fonction  $f$ .

.....

.....

.....

.....

e) Conclusion.

.....

.....

## 7. Dérivation (2)

3. Déterminer les signes de  $\cos x$  et  $\sin x$  pour les réels de l'intervalle  $]-\pi ; \pi]$  en faisant apparaître les résultats sur le cercle trigonométrique ci-contre.

Soit  $M$  sur ce cercle tel que  $\text{mes}(\vec{OA}, \vec{OM}) = x$ .

**Rappel :** l'abscisse du point  $M$  est égale à  $\cos x$  et son ordonnée à  $\sin x$ .

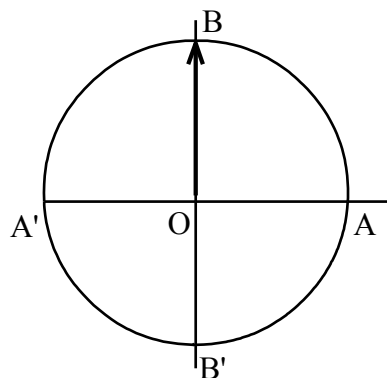


Fig. 1

4. Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $I = ]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \ln x$  et préciser le signe de  $\ln x$  sur  $I$ .

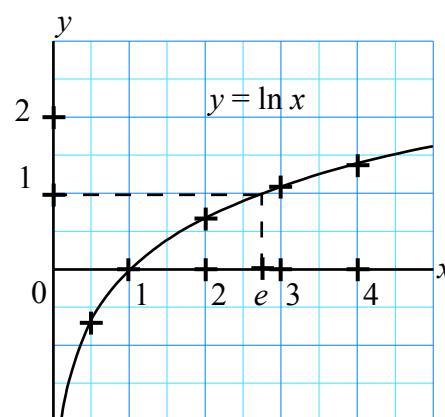


Fig. 2

5. Dresser le tableau de variation de la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $I = ]-\infty ; +\infty[$  par  $f(x) = e^x$  et préciser le signe de  $e^x$  sur  $I$ .

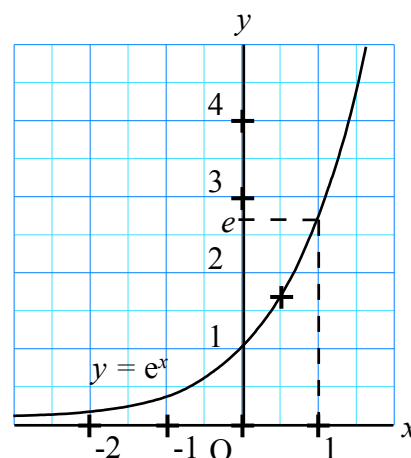


Fig. 3

## 7. Dérivation (2)

### II- Fonctions dérivées

Le tableau suivant donne les fonctions dérivées des fonctions usuelles.

| Nom                                      | $f(x)$              | $f'(x)$                                                  |
|------------------------------------------|---------------------|----------------------------------------------------------|
| constante                                | $k$                 | $0$                                                      |
| identité                                 | $x$                 | $1$                                                      |
| affine                                   | $ax + b$            | $a$                                                      |
| carré                                    | $x^2$               | $2x$                                                     |
| cube                                     | $x^3$               | $3x^2$                                                   |
| inverse                                  | $\frac{1}{x}$       | $-\frac{1}{x^2}$                                         |
| cosinus                                  | $\cos x$            | $-\sin x$                                                |
| sinus                                    | $\sin x$            | $\cos x$                                                 |
| logarithme                               | $\ln x$             | $\frac{1}{x}$                                            |
| exponentielle                            | $e^x$               | $e^x$                                                    |
| somme de deux fonctions                  | $u(x) + v(x)$       | $u'(x) + v'(x)$                                          |
| produit d'une fonction par une constante | $k \times u(x)$     | $k \times u'(x)$                                         |
| produit de deux fonctions                | $u(x) \times v(x)$  | $u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$                  |
| quotient de deux fonctions               | $\frac{u(x)}{v(x)}$ | $\frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$ |
| inverse d'une fonction                   | $\frac{1}{v(x)}$    | $\frac{-v'(x)}{(v(x))^2}$                                |
| fonction de fonction                     | $u(v(x))$           | $v'(x) \times u'(v(x))$                                  |

En s'aidant du tableau précédent, répondre aux questions suivantes.

→ 1. Soit  $f_1$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f_1(x) = 3x^2 + \ln x$ . Déterminer  $f_1'(x)$

.....

2. Soit  $f_2$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_2(x) = -1 + 6e^{-3x}$ . Déterminer  $f_2'(x)$

.....

.....

.....

3. Soit  $f_3$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f_3(x) = \frac{1}{x} - 3 \ln x$ . Déterminer  $f_3'(x)$ . Calculer  $f_3'(1)$ .

.....

.....

## 7. Dérivation (2)

→ 4. Soit  $f_4$  définie sur  $[-\pi ; +\pi [$  par  $f_4(x) = -2 \cos x$ . Déterminer  $f_4'(x)$ .

Calculer  $f_4'(0)$  et  $f_4'(\frac{\pi}{2})$ . En déduire le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de  $f_4$  aux points d'abscisse 0 et  $\frac{\pi}{2}$ .

.....

.....

.....

.....

.....

5. Soit  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = x^2 e^x$ .

a) Quelle est la forme de la fonction  $h$  ?

.....

b) En posant :  $u(x) = x^2$  et  $v(x) = e^x$ , déterminer  $u'(x)$  et  $v'(x)$  puis  $h'(x)$  sous forme factorisée.

$$u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = \dots\dots\dots$$

$$v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = \dots\dots\dots$$

$$h'(x) = \dots\dots\dots$$

6. Soit  $g$  définie sur  $] -1 ; +\infty [$  par  $g(x) = \frac{-3x + 4}{x - 1}$ .

a) Quelle est la forme de la fonction  $g$  ?

.....

b) En posant :  $u(x) = -3x + 4$  et  $v(x) = x - 1$ , déterminer  $u'(x)$  et  $v'(x)$  puis  $g'(x)$  sous forme factorisée.

$$u(x) = -3x + 4 \Rightarrow u'(x) = \dots\dots\dots$$

$$v(x) = x - 1 \Rightarrow v'(x) = \dots\dots\dots$$

$$g'(x) = \dots\dots\dots$$

.....

7. Soit  $k$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $k(x) = \frac{3x}{e^x}$ . En procédant comme précédemment, déterminer  $k'(x)$

.....

.....

.....

## 7. Dérivation (2)

### III- Sens de variation et courbes représentatives

**1. Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $I = [0, 1 ; 3]$  par  $f(x) = x^2 - 2 \ln x$ .**

a) Déterminer  $f'(x)$ . Donner son expression sous la forme d'un quotient.

b) Etudier le sens de variation de  $f$  et donner son tableau de variation.

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary school handwriting practice paper. The lines are evenly spaced and run across the entire width of the page. There are no margins, text, or other markings present.

c) Construire la courbe représentative de  $f$  dans le repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ci-contre.

|        |     |   |     |   |     |   |
|--------|-----|---|-----|---|-----|---|
| $x$    | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
| $f(x)$ |     |   |     |   |     |   |

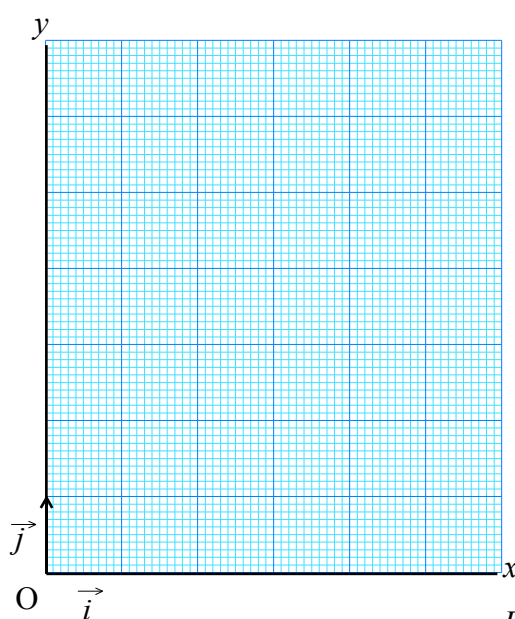


Fig. 4

## 7. Dérivation (2)

2. Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $I = [\frac{\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}]$  par  $g(x) = \frac{1}{\sin x}$ .

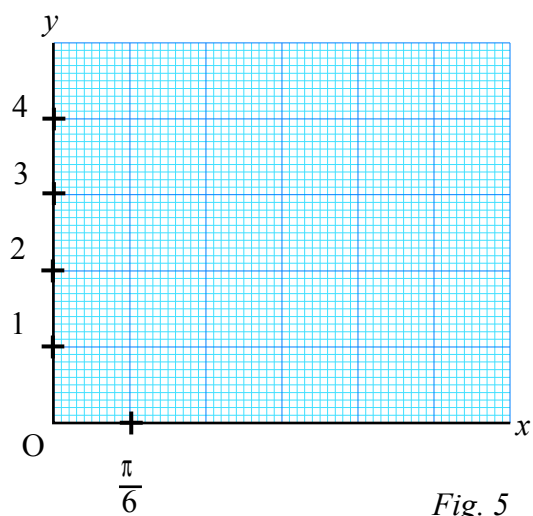
a) Déterminer  $g'(x)$ .

b) Etudier le sens de variation de  $g$  et donner son tableau de variation.

[illegible]

c) Construire la courbe représentative de  $g$  dans le repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ci-dessous.

|        |                 |                 |                 |                 |                 |
|--------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $x$    | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{6}$ |
| $g(x)$ |                 |                 |                 |                 |                 |



*Fig. 5*

## 7. Dérivation (2)

### IV- Exemple d'analyses médicales

A l'instant  $t = 0$ , on injecte dans le sang une dose de 3 mL d'un médicament. On se propose d'étudier le processus d'élimination du produit au cours des 12 heures suivant l'injection. La quantité de médicament présente dans le sang (exprimée en mL) en fonction du temps (exprimé en heures) est donnée par  $f(t) = 3 e^{-0,1 t}$  où  $f$  est la fonction définie sur  $I = [0 ; 11]$ .

1. Déterminer la fonction dérivée  $f'(t)$ .

.....

2. Etudier le sens de variation de  $f$  et donner son tableau de variation sur  $I$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Construire la courbe représentative de  $f$  dans le repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ci-dessous.

| $t$    | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| $f(t)$ |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |



Fig. 6

## 7. Dérivation (2)

4. Déterminer graphiquement la quantité de médicament présente dans le sang au bout de :

2 h 30 min : .....

5 h 30 min : .....

5. On injecte à un patient une dose de 3 mL du médicament. Lorsque la quantité de produit présente dans le sang devient inférieure à 1,5 mL, on injecte à ce patient une seconde dose. Par lecture graphique, en faisant apparaître les constructions utiles, indiquer au bout de combien de temps on procède à une seconde injection.

.....

### V- Intersection de courbes

Soit  $f$  et  $g$  les fonctions définies sur  $I = [-1 ; 3]$  par  $f(x) = \frac{2}{x+2}$  et  $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$

1. Etudier le sens de variation de  $f$  et  $g$  et donner leur tableau de variation.

.....

.....

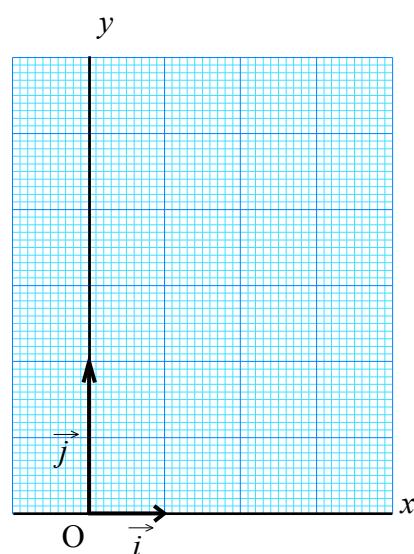
.....

.....

.....

2. Construire la courbe représentative de  $f$  et  $g$  dans le repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ci-dessous.

| $x$    | -0,5  | 0     | 0,5   | 1     | 1,5   | 2     | 2,5   |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $f(x)$ | ..... | ..... | ..... | ..... | ..... | ..... | ..... |
| $g(x)$ | ..... | ..... | ..... | ..... | ..... | ..... | ..... |



3. Résoudre graphiquement l'équation

$$f(x) = g(x)$$

.....

.....

Fig. 7