

6. Activités trigonométriques

I. Points sur le cercle trigonométrique

Soit C le cercle trigonométrique muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{OA}, \vec{OB})$.

Placer sur C , figure 1, les points $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8, M_9$ et M_{10} tels que :

$$(\vec{OA}, \vec{OM}_1) = \frac{\pi}{3} ; (\vec{OA}, \vec{OM}_2) = -\frac{\pi}{6} ;$$

$$(\vec{OA}, \vec{OM}_3) = 3\frac{\pi}{4} ; (\vec{OA}, \vec{OM}_4) = \pi ;$$

$$(\vec{OA}, \vec{OM}_5) = 5\frac{\pi}{6} ; (\vec{OA}, \vec{OM}_6) = -\frac{\pi}{2} ;$$

$$(\vec{OA}, \vec{OM}_7) = 17\frac{\pi}{6} ; (\vec{OA}, \vec{OM}_8) = -13\frac{\pi}{3} ;$$

$$(\vec{OA}, \vec{OM}_9) = -5\frac{\pi}{3} ; (\vec{OA}, \vec{OM}_{10}) = -29\frac{\pi}{2}$$

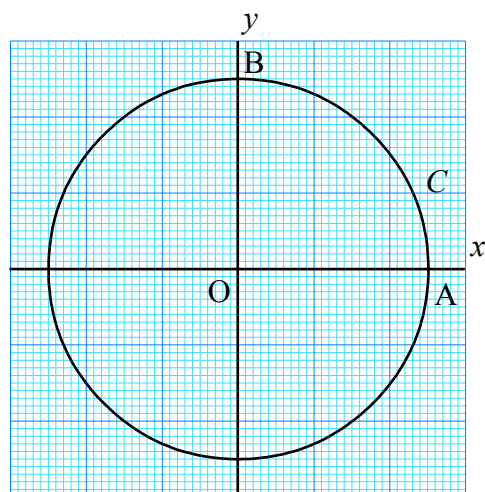


Fig. 1

Rappel : L'angle π (radian) vaut 180°

.....

.....

x (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

II. Valeurs remarquables

En utilisant le tableau ci-contre, et les

positions de M sur le cercle trigonométrique précédent compléter le tableau ci-dessous.

x (rad)	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$5\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	π	$2\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-5\frac{\pi}{6}$	$-3\frac{\pi}{4}$	$13\frac{\pi}{4}$	$-13\frac{\pi}{4}$
$\cos x$											
$\sin x$											
$\tan x$											

6. Activités trigonométriques

III. Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos x = a$

1. Que peut-on dire de l'équation $\cos x = a$ si $a > 1$ ou $a < -1$?

.....

2. Préciser l'unité graphique du cercle trigonométrique ci-contre

.....

Soit l'équation $\cos x = 0,5$ (E)

3. Résoudre graphiquement cette équation sur l'intervalle $[0 ; \pi]$. Donner la valeur exacte notée α_1 .

.....

4. En déduire la valeur α_2 d'une autre solution de cette équation sur l'intervalle $[-\pi ; 0]$.

.....

5. Les réels $x = 7\frac{\pi}{3}$ et $x = -5\frac{\pi}{3}$ sont-ils solutions de (E) ?

.....

.....

6. Quelles relations existe-t-il entre α_1 et les réels $x = 7\frac{\pi}{3}$ et $x = -5\frac{\pi}{3}$?

.....

.....

7. Les réels $x = 5\frac{\pi}{3}$ et $x = -7\frac{\pi}{3}$ sont-ils solutions de (E) ?

.....

8. Quelles relations existe-t-il entre α_2 et les réels $x = 5\frac{\pi}{3}$ et $x = -7\frac{\pi}{3}$?

.....

.....

9. Généraliser et en déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos x = 0,5$

.....

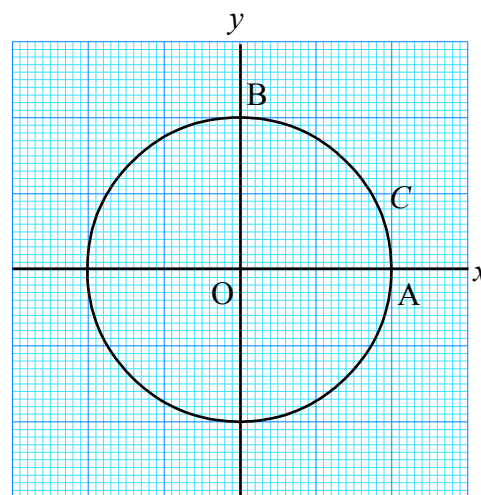


Fig. 2

6. Activités trigonométriques

10. Conclure en donnant les étapes de résolution de l'équation $\cos x = a$ dans $\mathbb{R}$.

.....

.....

.....

.....

11. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = -0,4$ (calculatrice en mode radian)

.....

IV. Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin x = b$

1. Que peut-on dire de l'équation $\sin x = b$ si $b > 1$ ou $b < -1$?

.....

Soit l'équation $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7$ (E')

2. Résoudre graphiquement cette équation sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Donner la valeur exacte notée α_1 .

.....

3. En déduire la valeur α_2 d'une autre solution de cette équation sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2}; 3\frac{\pi}{2}]$.

.....

4. Les réels $x = 9\frac{\pi}{4}$ et $x = -7\frac{\pi}{4}$ sont-ils solutions de (E') ?

.....

.....

5. Quelles relations existe-t-il entre α_1 et les réels $x = 9\frac{\pi}{4}$ et $x = -7\frac{\pi}{4}$?

.....

.....

6. Les réels $x = 11\frac{\pi}{4}$ et $x = -5\frac{\pi}{4}$ sont-ils solutions de (E') ?

.....

.....

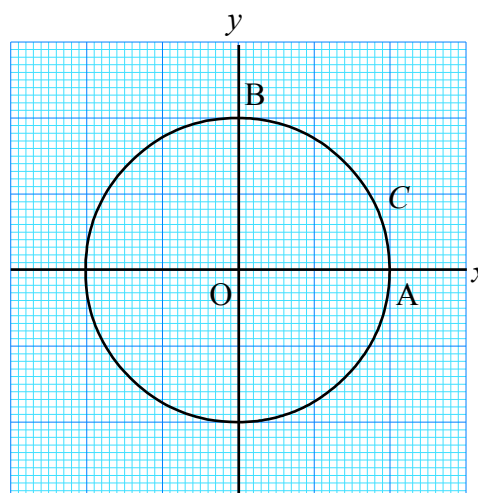


Fig. 3

6. Activités trigonométriques

7. Quelles relations existe-t-il entre α_2 et les réels $x = 11 \frac{\pi}{4}$ et $x = -5 \frac{\pi}{4}$?

→

8. Généraliser et en déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

.....

9. Conclure en donnant les étapes de résolution de l'équation $\sin x = b$ dans $\mathbb{R}$

.....

10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = 0,7$ (calculatrice en mode radian)

.....

V. Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\tan x = c$

Sur le cercle trigonométrique, on considère la droite (T) tangente au cercle au point A. Cette droite est munie d'un repère (A, $\vec{j}$).

Soit M le point du cercle tel que $(\vec{OA}, \vec{OM}) = x$.

La droite (OM) coupe la droite (T) en un point de coordonnées N(1 ; $\tan x$).

1. Déterminer graphiquement et vérifier avec la calculatrice les valeurs de :

Valeurs lues sur le graphique à 0,1	Valeurs lues sur la calculatrice à 0,01
$\tan \frac{\pi}{4} = \dots\dots\dots$	$\tan \frac{\pi}{4} = \dots\dots\dots$
$\tan 2 \frac{\pi}{3} = \dots\dots\dots$	$\tan 2 \frac{\pi}{3} = \dots\dots\dots$
$\tan \pi = \dots\dots\dots$	$\tan \pi = \dots\dots\dots$
$\tan -\frac{\pi}{6} = \dots\dots\dots$	$\tan -\frac{\pi}{6} = \dots\dots\dots$
$\tan -5 \frac{\pi}{6} = \dots\dots\dots$	$\tan -5 \frac{\pi}{6} = \dots\dots\dots$

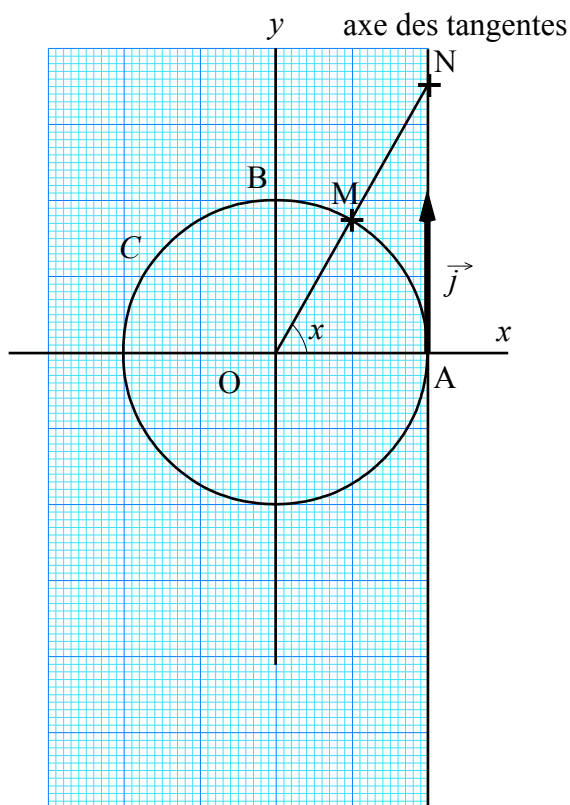


Fig. 4

6. Activités trigonométriques

- 2. A l'aide du cercle trigonométrique, déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'équation $\tan x = c$ n'a pas de solution.

.....

Soit α_1 un nombre réel et soit M_1 le point du cercle trigonométrique tel que $\text{mes}(\vec{OA}, \vec{OM}_1) = \alpha_1$. Soit M_2 le point du cercle trigonométrique diamétralement opposé à M_1 , et soit α_2 le nombre réel tel que $\text{mes}(\vec{OA}, \vec{OM}_2) = \alpha_2$.

3. Quelle relation existe-t-il entre α_1 et α_2 ?

4. Conclure en donnant les étapes de résolution de l'équation $\tan x = c$ dans $\mathbb{R}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, k entier relatif

.....

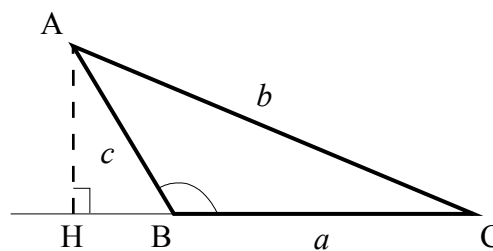
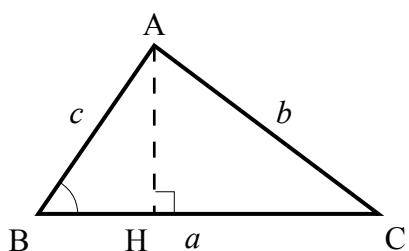
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\tan x = -0,5$ (calculatrice en mode radian)

.....

VI. Relations trigonométriques dans le triangle

Considérons un triangle ABC avec dans le premier cas $\widehat{B}$ aigu et dans un second cas $\widehat{B}$ obtus.

H est le pied de la hauteur issue de A. On pose alors $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.



1. Exprimer, pour chaque cas, $\sin \widehat{ABH}$ dans le triangle ABH.

Comparer $\sin \widehat{ABH}$ et $\sin \widehat{ABC}$. En déduire AH en fonction de c et $\sin \widehat{B}$ (du triangle ABC).

.....

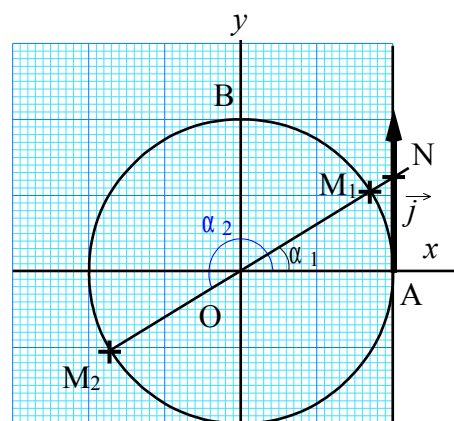


Fig. 5

6. Activités trigonométriques

2. En déduire pour les deux cas, l'aire du triangle ABC en fonction de a et de c .

.....

3. Quelles relations obtient-on de la même manière, en permutant les sommets du triangle ABC ?

.....

4. Quelles relations obtient-on en divisant les trois termes par $\frac{1}{2}abc$?

.....

.....

.....

.....

5. Soit ABC un triangle quelconque. En posant $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$ exprimer $\vec{BC}^2$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ puis utiliser l'expression en cosinus du produit scalaire.

En déduire BC^2 en fonction de AB, AC et $\cos \hat{A}$.

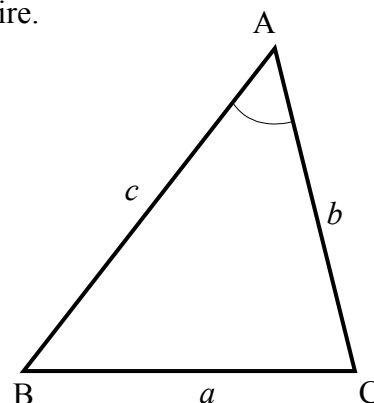
.....

.....

.....

.....

.....



6. Quelle relation obtient-on entre a , b et c ?

Quelles relations obtient-on en permutant les sommets du triangle ?

.....

.....

.....

7. Dans un triangle quelconque ABC, déterminer a , $\hat{B}$ et $\hat{C}$ si $b = 4$, $c = 5$ et $\hat{A} = 60^\circ$

.....

.....

.....

.....

.....