

5. Vecteurs du plan et produit scalaire

I. Vecteur du plan

Soit les points A et B donnés dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Rappel : un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est **orthonormal** si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont **perpendiculaires** et de **même norme** (longueur)

1. Donner, pour le vecteur $\vec{AB}$, ses coordonnées et son expression en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
 $\vec{AB}$ $\vec{AB} =$

Rappel : Si dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ deux points A et B sont repérés par leurs coordonnées, $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ alors les coordonnées du vecteur AB sont notées :
 $\vec{AB}(x ; y)$ telles que $x = x_B - x_A$ et $y = y_B - y_A$
 On peut écrire alors $\vec{AB} = x \vec{i} + y \vec{j}$.

2. Construire, pour les points A et B, leurs projections orthogonales respectives C et D sur l'axe des abscisses puis E et F sur l'axe des ordonnées.

3. En déduire les coordonnées des vecteurs $\vec{CD}$ et $\vec{EF}$ et leur expression en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
 $\vec{CD}$ $\vec{CD} =$
 $\vec{EF}$ $\vec{EF} =$

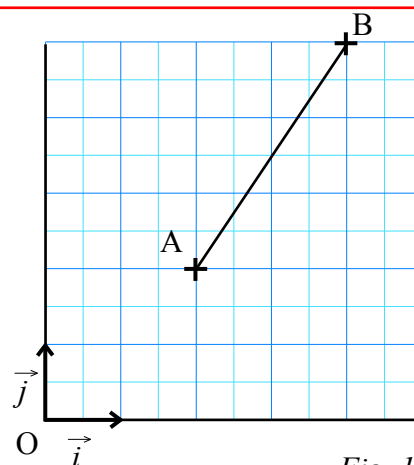


Fig. 1

4. Calculer, arrondie à 0,1 la norme des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ et $\vec{EF}$.

.....

Rappel : la norme d'un vecteur $\vec{AB}(x ; y)$ ou sa longueur se note $\|\vec{AB}\| = AB = \sqrt{x^2 + y^2}$

5. Comparer $\vec{AB}$ et $\vec{CD} + \vec{EF}$ puis AB et CD + EF.

.....

6. Construire le point H tel que $\vec{AH} = \vec{CD}$.

Que représente H pour le point B ? pour le point A ?

.....

5. Vecteurs du plan et produit scalaire

II. Cercle trigonométrique

Soit C le cercle trigonométrique muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{OA}, \vec{OB})$.

Rappel : un cercle trigonométrique muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{OA}, \vec{OB})$ est un cercle de rayon 1, de centre O et de vecteurs unitaires $\vec{OA}$ en abscisse et $\vec{OB}$ en ordonnée.

1. Placer, figure 2, les points C et D tels que :

$$\text{mes}(\vec{OA}, \vec{OC}) = \frac{\pi}{3} \quad \text{et} \quad \text{mes}(\vec{OA}, \vec{OD}) = \frac{3\pi}{4}$$

Rappel : $\text{mes}(\vec{OA}, \vec{OC})$ est la mesure de l'angle orienté des vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OC}$.

L'angle π (radian) vaut **180°**

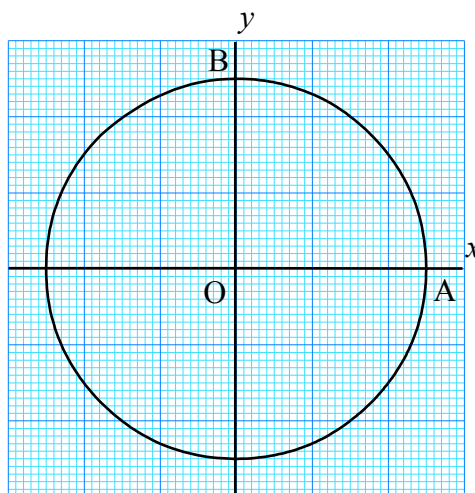


Fig. 2

2. Préciser l'unité graphique

.....

3. Construire les projetés orthogonaux H et K des points C et D sur la droite (OA) .

4. Donner, d'après le quadrillage, la valeur arrondie à 0,1 de $\overline{OH}$ et $\overline{OK}$. Que représente $\overline{OH}$ et $\overline{OK}$? Le vérifier à la calculatrice.

.....

.....

.....

Rappel : Si O et H sont sur un axe, $\overline{OH}$ est la **mesure algébrique** et $\overline{OH} = x_H - x_O$

Si O est l'origine du repère alors $\overline{OH} = x_H$.

Si H est le **projeté orthogonal** sur l'axe des abscisses d'un point C d'un cercle trigonométrique muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{OA}, \vec{OB})$ alors $\overline{OH}$ est le **cosinus** de l'angle $(\vec{OA}, \vec{OC})$.

5. Soit M un point du cercle trigonométrique C tel que $\alpha = \widehat{AOM}$. En déduire la valeur ou le signe de $\cos \alpha$ suivant la nature de α .

α (°)	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = \text{aigu}$	$\alpha = 90^\circ$	$\alpha = \text{obtus}$
$\cos \alpha$				

5. Vecteurs du plan et produit scalaire

III. Produit scalaire dans le plan

1. Placer, figure 3, le point B tel que :

$$\|\vec{OB}\| = OB = 4 \quad ; \quad \text{mes}(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{3}$$

$\vec{OI}$ est le vecteur unitaire.

2. Donner la norme du vecteur $\vec{OA}$: $\|\vec{OA}\| = OA = \dots\dots\dots$

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$, noté $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \times OB \times \cos(\vec{OA}, \vec{OB})$

3. Calculer le produit scalaire

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \dots\dots\dots$$

4. Placer, figure 4, les points M_i tels que $\alpha = \text{mes}(\vec{OA}, \vec{OM}_i)$, $\vec{OI}$ est le vecteur unitaire.

M_i	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
OM_i	5	3	3,5	5,5	4	2,5
α (rad)	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$

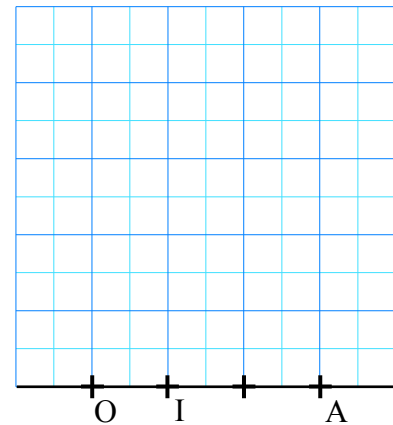


Fig. 3

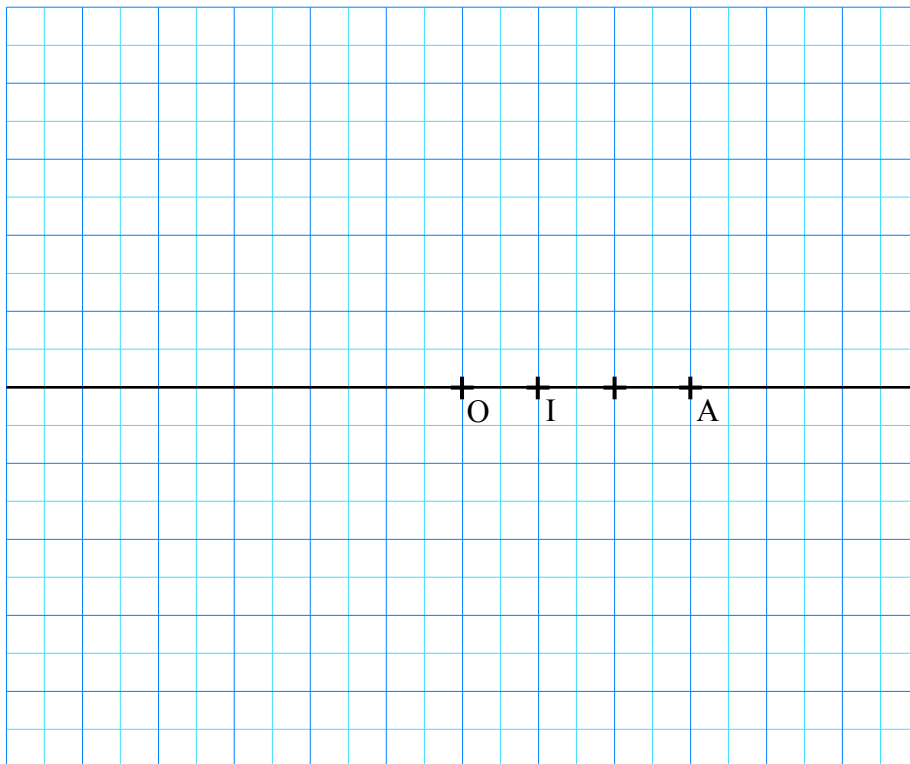


Fig. 4

5. Vecteurs du plan et produit scalaire

5. Calculer la valeur arrondie à 0,1 des produits scalaires $\vec{OA} \cdot \vec{OM}_i$ ($1 \leq i \leq 6$) suivant l'exemple.

On pose $\alpha = \widehat{MOA}$.

$\vec{OA} \cdot \vec{OM}_1$	$OA \times OM_1 \cos \alpha$	$3 \times 5 \cos 0$	15
.....			
.....			
.....			
.....			
.....			

6. Conclure en donnant la définition du produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et la nature de son résultat.

.....

.....

.....

7. Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

En utilisant les résultats question 5, y a-t-il une autre possibilité pour avoir $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$?

.....

.....

8. Conclure, en donnant les deux conditions, pour que le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soit nul.

.....

.....

.....

9. Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$ d'un vecteur par lui-même se nomme carré scalaire et se note $\vec{u}^2$.

Conclure en exprimant $\vec{u}^2$ en fonction de $\|\vec{u}\|$.

.....

.....

5. Vecteurs du plan et produit scalaire

IV. Expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormal

1. Que signifie $(O, \vec{i}, \vec{j})$, repère orthonormal ?

.....

.....

2. En déduire le calcul de $\vec{i}^2, \vec{j}^2$ et de $\vec{i} \cdot \vec{j}$

.....

.....

3. Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ de coordonnées respectives : $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{u}'(x', y')$.

Exprimer $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Puis à partir des propriétés admises et valables quel

que soit le repère : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$; $\alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \alpha \vec{u} \cdot \vec{v}$; $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$,

calculer $\vec{u} \cdot \vec{u}'$

.....

.....

.....

.....

4. Conclure en résumant la réponse 3.

.....

.....

V. Application au triangle

1. Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donnés dans un repère orthonormal, figure 5.

Lire leur coordonnées.

.....

2. Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Que peut-on en déduire ?

.....

.....

3. Construire les vecteurs $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{AC} = \vec{v}$

En déduire la nature du triangle ABC.

.....

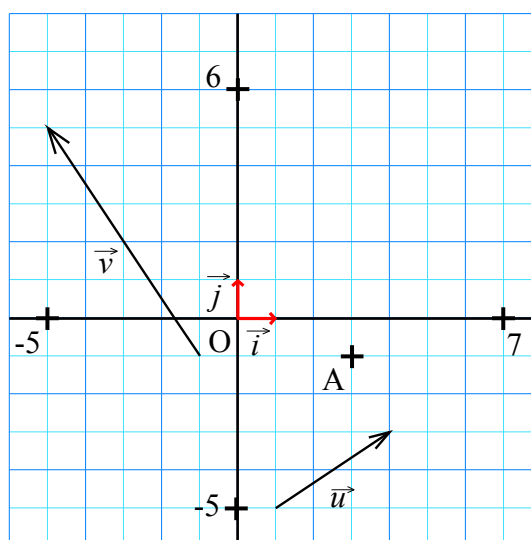


Fig. 5

5. Vecteurs du plan et produit scalaire

4. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$. En déduire la valeur arrondie à 0,1 de BC.

.....

.....

5. Placer le point D(4 ; 6) sur la figure 5. Tracer [AD]. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AD}$. En déduire la valeur arrondie à 0,1 de AD.

.....

.....

6. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

.....

.....

.....

.....

7. Calculer la valeur exacte de AB

.....

8. Soit $\alpha = \text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$. Utiliser les deux définitions :

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u'} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{u'}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u'} = x x' + y y'$ pour calculer la valeur arrondie à 0,001 de $\cos \alpha$. En déduire la valeur arrondie au degré de α .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. Vecteurs du plan et produit scalaire

VI. Exemple d'équation du cercle

1. Soit le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Placer le point $A(5 ; 6)$ et construire le cercle C de centre A et rayon 5.

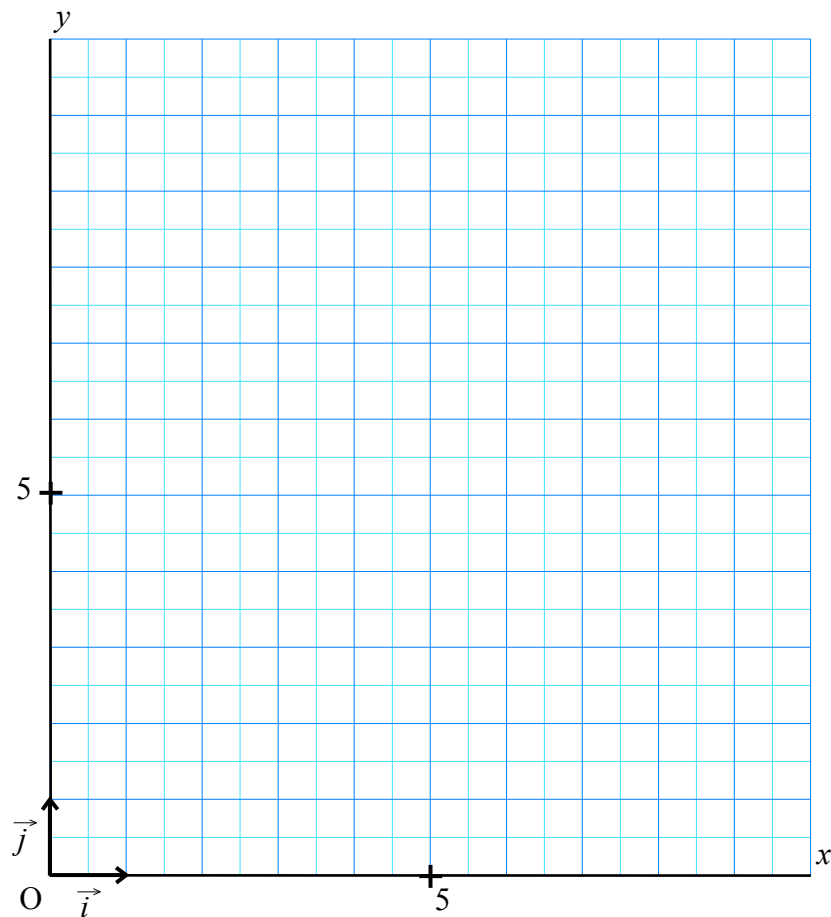


Fig. 6

2. Soit M un point quelconque du cercle C de coordonnées (x, y) .

Calculer le carré scalaire $\overrightarrow{AM}^2$ en fonction de x et y .

.....

.....

.....

3. Donner la valeur exacte de AM et de AM^2 . En déduire une équation du cercle C .

.....

.....

.....

5. Vecteurs du plan et produit scalaire

4. Placer, figure 6, le point $B(9 ; 9)$ et $D(1 ; 3)$. Sont-ils sur le cercle C ? Vérifier par le calcul avec l'équation du cercle trouvé à la question 3.

.....

.....

.....

.....

5. Y a-t-il un autre point du cercle C d'abscisse 9. Si oui, le nommer E et calculer son ordonnée

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. Déterminer graphiquement puis par le calcul les coordonnées des points d'intersection F et G de C avec la droite (Δ) d'équation $y = 10$ ($x_F < x_G$).

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7. Soit $F(2 ; 10)$. Calculer le produit scalaire $\vec{DF} \cdot \vec{FB}$, que peut-on en déduire concernant $[FB]$?

.....

.....

.....

.....

.....