4. Fonctions logarithmes et exponentielles

I- Fonction du type $x \longmapsto a^x$

Un capital C est placé à intérêts composés, au taux annuel de 5 %. La capitalisation est annuelle, c'est à dire qu'à la fin de chaque année, on ajoute les intérêts au capital. La somme est appelée valeur acquise, et produit à nouveau des intérêts l'année suivante.

1. L'intérêt produit la première année est donné par la relation :

$$\boldsymbol{i = C\,t\,n} \qquad \text{avec } t \text{ le taux annuel et } n \text{ le nombre d'années.}$$

Exprimer la valeur acquise A_1, à la fin de la première année en fonction de C.

....

....

....

2. Exprimer A_2 et A_3 les valeurs acquises en fonction de C respectivement :

après 2 ans.

....

....

....

....

et après 3 ans

....

....

....

....

Rappel : Suites arithmétiques et géométriques

Les termes d'une suite **arithmétique**, sauf le premier, s'obtiennent en **ajoutant** au terme précédent un même nombre appelé **raison**.

Les termes d'une suite **géométrique**, sauf le premier, s'obtiennent en **multipliant** le terme précédent par un même nombre non nul appelé **raison**.

3. Déduire de ce qui précède l'expression de A_n, après n années, en fonction de C.

Quelle est la nature de la suite formée par les valeurs acquises ?

....

....

....

4. Après n années de placement, la valeur acquise A_n est égale au triple du capital C. Traduire cette phrase par une équation d'inconnue n.

....

5. Par essais successifs, avec la calculatrice, trouver un encadrement de n d'amplitude 1. Pour cela, compléter le tableau suivant, en arrondissant les valeurs de $(1{,}05)^n$ à 0,001 près.

n	0	1	10	20	30	25	22	23
$(1{,}05)^n$								

....

4. Fonctions logarithmes et exponentielles

6. Soit la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 30] par $f(x) = 1{,}05^{x}$.

a) Placer les points de coordonnées (n ; $1{,}05^n$) du tableau précédent, dans le repère orthogonal suivant.

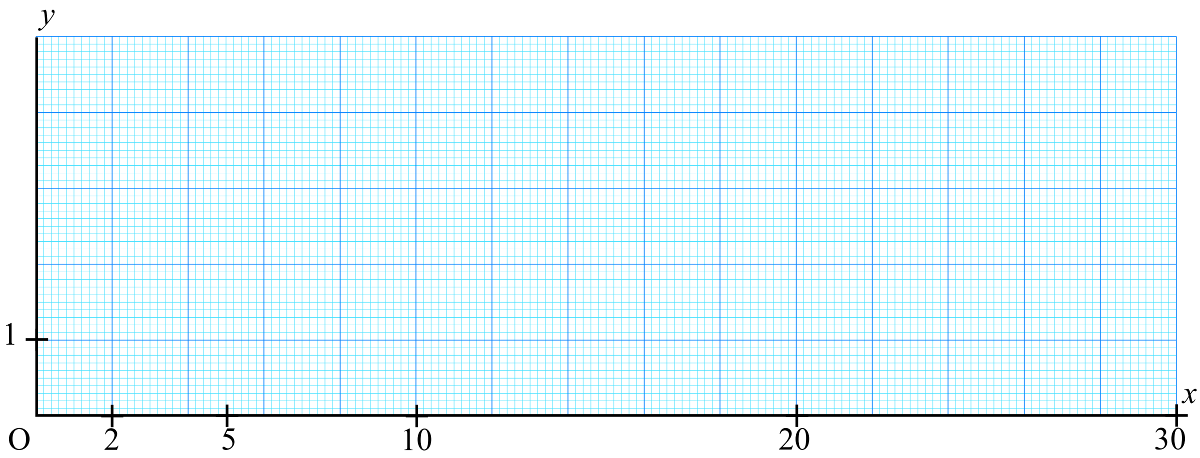


Fig.1

b) Rechercher d'autres coordonnées de points supplémentaires pour pouvoir tracer la courbe représentative de cette fonction.

....

c) Déterminer graphiquement la solution de l'équation $1{,}05^x = 3$

....

7. John Néper propose une autre méthode pour résoudre cette équation.

Consulter un dictionnaire pour rechercher les réponses suivantes :

sa nationalité : ....

ses dates de vie : ....

sa découverte essentielle : ....

....

....

....

....

....

....

4. Fonctions logarithmes et exponentielles

II- Découverte de la fonction *ln* à l'aide de la calculatrice

La notation " $ln\ x$ " se lit logarithme népérien de x.

1. En utilisant la calculatrice, compléter le tableau suivant (donner la valeur arrondie à 10^{-4} près)

x	-5	-2	0	1	2	3	4	5	6
$ln\ x$	....	....	....	....	....	....	....	....	....

Observer les résultats et conclure.

....

2. En utilisant les données du tableau précédent, calculer :

$ln\ 2 + ln\ 3 =$ ....

Puis comparer ce résultat aux autres valeurs du tableau.

....

3. Choisir dex nombres a et b positifs et compléter le tableau suivant :

a	b	$a \times b$	$ln\ a$	$ln\ b$	$ln\ (a \times b)$	$ln\ a + ln\ b$
....	....	....	....	....	....	....

Conclure en donnant une relation entre $ln\ a$, $ln\ b$ et $ln\ (a \times b)$

....

4. Compléter le tableau suivant, en choisissant une valeur de a positive.

a	$ln\ a$	$ln\ \frac{1}{a}$	$ln\ a^2$	$ln\sqrt{a}$
....	....	....	....	....

Conclure en donnant une relation entre :

- $ln\ a$ et $ln\ \frac{1}{a}$: ....
- $ln\ a$ et $ln\ a^2$: ....
- $ln\ a$ et $ln\sqrt{a}$: ....

5. Calculer $ln\ x$ pour x dans l'intervalle [0,1 ; 10] (donner la valeur arrondie de $ln\ x$ à 10^{-2}).

x	0,1	0,5	1	2	3	4	5	7	10
$ln\ x$	....	....	....	....	....	....	....	....	....

4. Fonctions logarithmes et exponentielles

6. Dans un repère orthonormal, placer les points de coordonnées (x ; $ln\ x$), puis tracer à main levée la courbe qui passe par les différents points.

Fig. 2

7. Déterminer graphiquement la valeur de x pour laquelle $ln\ x = 1$.

....

La valeur de x telle que $ln\ x = 1$ est notée e.

$ln\ e =$............ Une valeur apporchée de e est : ....

8. En utilisant les conclusions de la question précédente, calculer :

- $ln\ e^2 =$ ....
- $ln\ e^3 =$ ....
- $ln\ e^0 =$ ....

Conclure en généralisant.

- $ln\ e^n =$ ....

Compléter la définition suivante :

La fonction qui, à toute puissance de e, fait correspondre .... est appelée

....

Compléter son tableau de variation :

x	0	1	e	$+\infty$
$ln\ x$	‖	.....	.....	....

4. Fonctions logarithmes et exponentielles

III- Fonction logarithme décimal : ***log***

Le logarithme décimal de x est noté $log\, x$. Il est défini par les relations : $\boldsymbol{log\, x = \dfrac{ln\, x}{ln\, 10}}$; $\boldsymbol{log\, 10^{\,n} = n}$

1. Calculer, sans calculatrice, $log\; 10^{\,2,7}$

....

2. Calculer, sans calculatrice, en utilisant les puissances de 10 :

$log\; 1 = log\; 10^{\,0}$ = ...	$log\; 1000 = log$ .... = ...
$log\; 10 = log$ ...... = ...	$log\; 0{,}1 = log$ .... = ...
$log\; 100 = log$ ...... = ...	$log\; 0{,}01 = log$ .... = ...

Conclure en généralisant.

$log\; 10^{\,n}$ = ... $log\; 10^{\,-n}$ = ...

Compléter la définition suivante :

La fonction qui, à toute puissance de 10, fait correspondre .... est appelée

....

Compléter son tableau de variation :

x	0	1	10	$+\infty$
$log\, x$	‖	......	......	......

III- Fonction exponentielle : $\boldsymbol{e^x}$

Dans le repère ci-contre, la courbe C_f représente la fonction f définie sur $I = [0{,}1 \,;\, 8]$ par $f(x) = ln\, x$.

1. Dans ce repère, tracer la droite (D) d'équation $y = x$.

2. Tracer la courbe C' symétrique de C_f par rapport à (D).

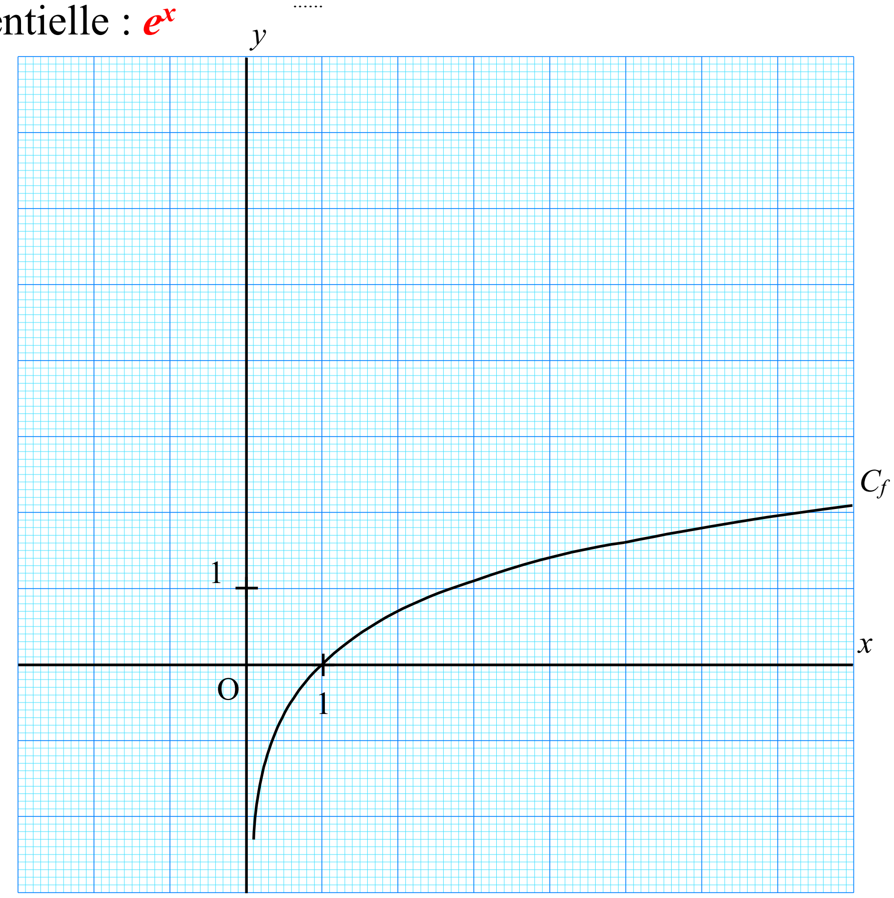


Fig. 3

4. Fonctions logarithmes et exponentielles

3. Utiliser la touche e^x de la calculatrice pour remplir le tableau suivant (valeurs arrondies à 10^{-2}.)

x	-2	-1,5	-1	0	0,5	1	1,5	2
e^x	....	....	....	....	....	....	....	....

4. Dans le repère précédent (*Fig. 3*), placer les points de coordonnées (x ; e^x).

Que remarque-t-on ?

....

Compléter la définition suivante :

La coube C' est la représentation graphique ....

....

Compléter son tableau de variation :

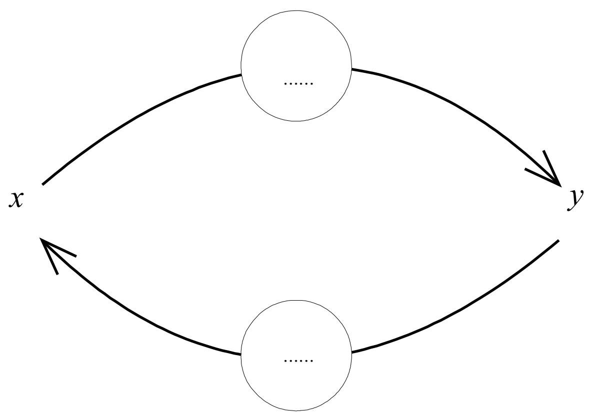
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
e^x	......	......	......	......

5. Choisir deux valeurs de x appartenant à l'intervalle $]-\infty\ ;+\infty[$.

Avec la calculatrice, calculer successivement $y = e^x$, et noter l'affichage dans le tableau suivant :

x	$y = e^x$	$\ln y$
....	....	....
....	....	....

Conclure en complétant le schéma ci-dessous et en rédigeant une phrase explicative.



x réel quelconque.

y réel strictement positif

....

4. Fonctions logarithmes et exponentielles

V- Exemple de calculs logarithmiques

1. Calculer :

$ln\ e^2 =$ .... $ln\ \sqrt{e} =$ ....

$ln\ e^{-1} =$ .... $ln\ \frac{1}{e^2} =$ ....

2. Avec la calculatrice, compléter le tableau (arrondir à 10^{-3}).

x	0,05	15,02	157	1236
$ln\ x$	....	....	....	....
$log\ x$	....	....	....	....
$\frac{ln\ x}{log\ x}$	....	....	....	....

Quelle est la valeur exacte du quotient $\frac{ln\ x}{log\ x}$?

....

....

Ce résultat est-il vérifié dans le tableau précédent ?

....

3. Exprimer en fonction de *log a* et de *log b* :

$log\ (a^3) =$ ....

$log\ (a^2 b) =$ ....

$log\ (\frac{b}{a^5}) =$ ....

$log\sqrt{(a\ b)} =$ ....

4. Résoudre les équations suivantes :

$ln\ (3x) = 0$ ....

$ln\ (2x + 1) = 0$ ....

$ln\ (2x) = 5$ ....

$e^x = 1$ ....

$e^{x+2} = 1$ ....

$e^x = 3$ ....

$e^{x-1} = 3$ ....

$e^{2x} = 5$ ....

$e^{2x-1} = 1$ ....

4. Fonctions logarithmes et exponentielles

V- Exemple de placement à intérêts composés

Après n années de placement, un capital C a une valeur acquise A égale au triple du capital C initial. Le taux annuel est 5 % et la capitalisation est annuelle. On a vu que cette situation se traduit par l'équation : $A = 3 \times C$ soit $C \times 1{,}05^{n} = 3 \times C$ donc $1{,}05^{n} = 3$.

Calculer la valeur apporchée de n à 10^{-1} près par excès.

....

....

VI- Exemple de calcul de pH d'une solution aqueuse

Une solution aqueuse de chlorure d'hydrogène contient 0,1 mole de (H_3O^+ ; Cl^-) par litre. La concentration molaire des ions H_3O^+ se note $[H_3O^+]$, elle est égale à 0,1 mol/L.

Le pH d'une solution est définie par la relation **$pH = -\log [H_3O^+]$**.

Calculer le pH de cette solution :

....

On dilue 10 fois la solution initiale. Quel est le pH de la nouvelle solution ?

....

VII- Exemple de désintégration d'un corps radioactif

Un corps radioactif perd 20 % de sa masse en un an, par désintégration radioactive spontanée. Pour une masse initiale de 50 g, la masse restante en g après n années est donnée par $m = 50 \times 0{,}8^{n}$.

Calculer les masses pendant les cinq premières années. Placer sur le repère semi-logarithmique ci-contre les points de coordonnées (n ; m).

n	1	2	3	4	5
m	......	......	......	......	......

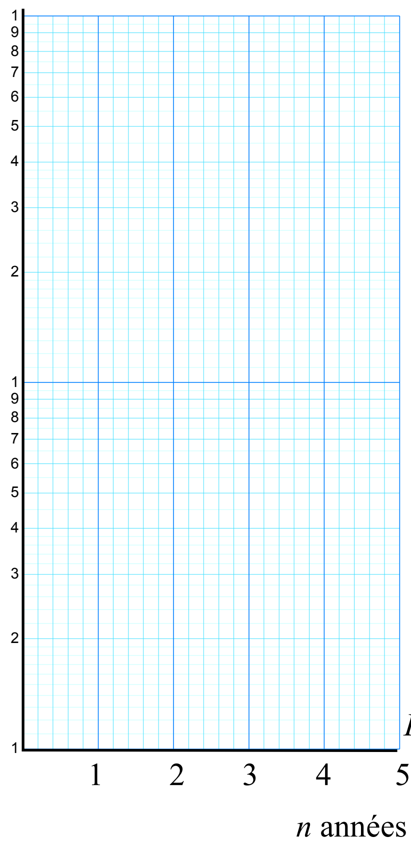


Fig. 5