3. Dérivée, sens de variation d'une fonction

I- Tangente à une courbe

1. Dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les droites (D_1), (D_2) et (D_3)

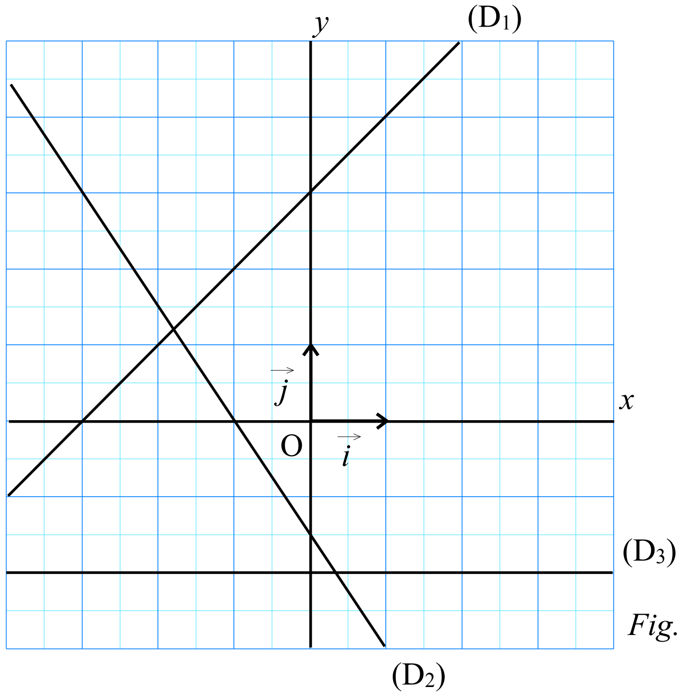


Fig. 1

Rappel :
Dans l'équation d'une droite de la forme $y = ax + b$, a est le coefficient directeur de cette droite. Si la droite passe par les points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ alors $a = \dfrac{(y_A - y_B)}{(x_A - x_B)}$

Calculer le coefficient directeur de chacune des droites (D_1), (D_2) et (D_3), en plaçant deux points sur chaque droite, dont on donnera les coordonnées.

sur (D_1) : ....

coefficient directeur de (D_1) : ....

sur (D_2) : ....

coefficient directeur de (D_2) : ....

sur (D_3) : ....

coefficient directeur de (D_3) : ....

3. Dérivée, sens de variation d'une fonction

2. Soit la représentation graphique C_f de la fonction f définie sur l'intervalle [-3 ; 3] par $f(x) = 0{,}5\,x^2$. Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère les points A(2 ; 2) et B(-1 ; 0,5) de C_f

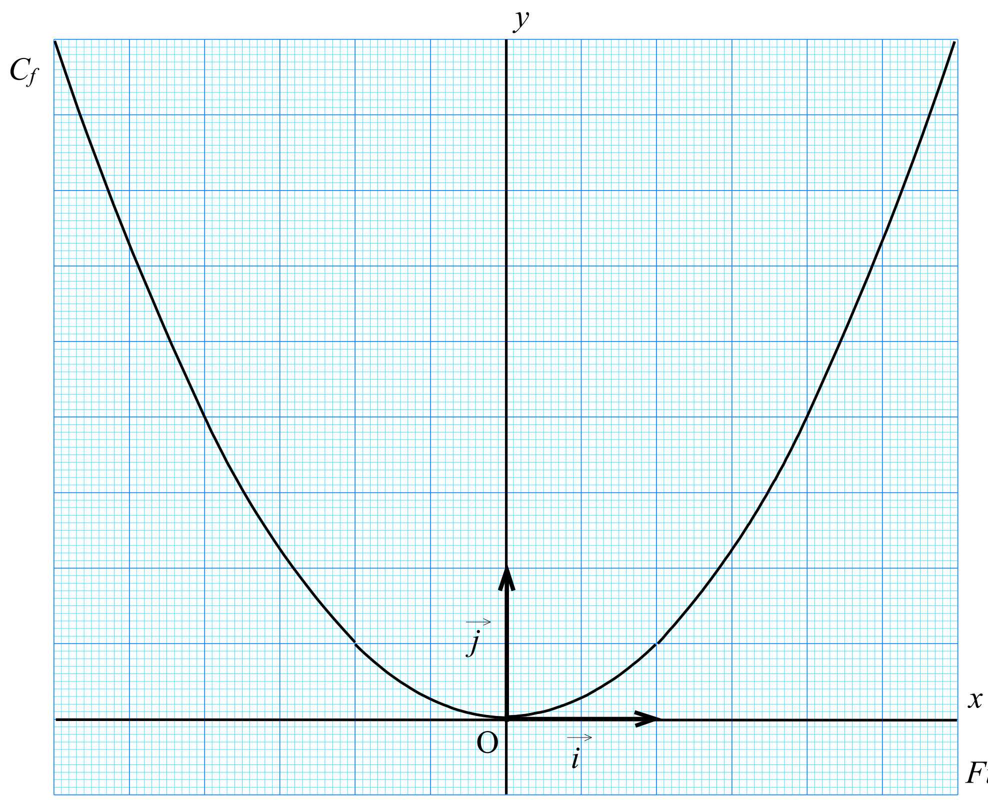


Fig. 2

a) Tracer la droite (D_1) passant par A et de coefficient directeur 2 et la droite (D_2) passant par B et de coefficient directeur -1.

b) Donner l'équation de ces deux droites sous la forme $y = ax + b$.

(D_1) : ……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

(D_2) : ……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

c) Dire intuitivement quelle semble être la position relative des droites (D_1) et (D_2) par rapport à la courbe C_f ?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

3. Dérivée, sens de variation d'une fonction

II- Recherche du nombre dérivé

Soit la représentation graphique C_f de la fonction f définie sur l'intervalle [-3 ; 3] par $f(x) = x^2$ dans le plan est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit le point A de coordonnées (1 ; 2).

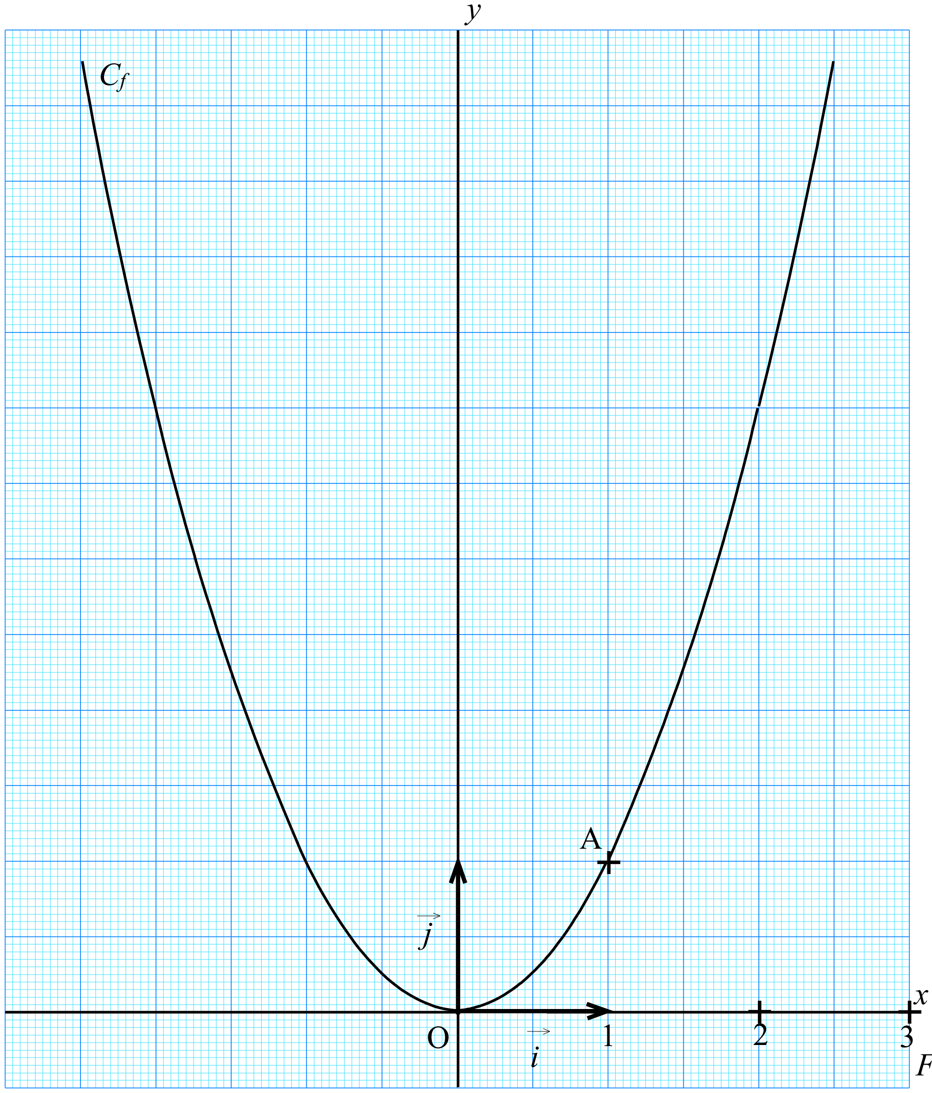


Fig. 3

1. Tracer de façon intuitive la droite passant par A et tangente à la courbe C_f.
Déterminer le coefficient directeur de cette droite .

....

2. De même, tracer la droite tangente à la courbe C_f passant par B d'abscisse 0,5.
Déterminer le coefficient directeur de cette droite .

....

On appelle **nombre dérivé** de la fonction f au point d'abscisse k le **coefficient directeur** de la tangente à la courbe au point de coordonnées (k ; f(k)). On le note f'(k).

3. A partir des résultats précédents, déterminer les valeurs de $f'(1)$ et et $f'(0,5)$

....

....

4. (*Fig. 3*), tracer la tangente à la courbe afin de déterminer la valeur de $f'(-1,5)$.

....

5. Compléter le tableau ci-dessous. Quelle relation peut-on déduire entre k et $f'(\text{k})$?

k	-1,5	0,5	1
$f'(\text{k})$	....	....	....

....

....

On appelle **fonction dérivée,** notée f' de la fonction f, la fonction qui à tout réel x, fait correspondre le nombre dérivé de la fonction f.

6. Dans le cas étudié de la fonction f telle que $f(x) = x^2$, en déduire l'image $f'(x)$ de sa fonction dérivée : $f'(x) =$ ....

III- Fonctions dérivées

Le tableau suivant donne les fonctions dérivées des fonctions usuelles.

Nom	$f(x)$	$f'(x)$
constante	k	0
identité	x	1
affine	$a\,x + b$	a
carré	x^2	$2\,x$
cube	x^3	$3\,x^2$
inverse	$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
somme de deux fonctions	$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
produit d'une fonction par une constante	k $u(x)$	k $u'(x)$

En vous aidant du tableau ci-dessus, déterminer l'expression des fonctions dérivées suivantes.

Expression de la fonction	Expression de sa dérivée
1. $f(x) = x^2 + x^3$	$f'(x) =$ ....
....	
2. $g(x) = -3\,x + 4$	$g'(x) =$ ....
....	
3. $h(x) = -6\,x^2 + 4\,x - 2$	$h'(x) =$ ....

....

3. Dérivée, sens de variation d'une fonction

En vous aidant du tableau précédent, déterminer l'expression des fonctions dérivées suivantes.

Expression de la fonction	Expression de sa dérivée
4. $i(x) = x^3 + \dfrac{1}{x}$	$i'(x) =$ ....
5. $j(x) = 3x^3 - \dfrac{2}{x}$	$j'(x) =$ ....

6. Soit h la fonction définie sur $]0\ ;\ 8]$ par $h(x) = -3x - \dfrac{1}{x}$.
Déterminer l'expression de sa dérivée.

....

En déduire la valeur du coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction h au point d'abscisse 1.

....

7. Déterminer le ou les points de la courbe représentative de la fonction cube ($x \longmapsto x^3$) dont le coefficient directeur de la tangente est 3. Déterminer les équations de ces tangentes.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

8. Conclusion : **La tangente** à la courbe représentative de la fonction f, au point d'abscisse k et d'ordonnée f(k) a pour coefficient directeur ....

L'équation de la tangente peut s'écrire $\boldsymbol{y = f'(\mathrm{k})\,(x - \mathrm{k}) + f(\mathrm{k})}$

3. Dérivée, sens de variation d'une fonction

IV- Sens de variation d'une fonction

Soit la représentation graphique C_f, ci-dessous, de la fonction f définie sur l'intervalle [-4 ; 3].

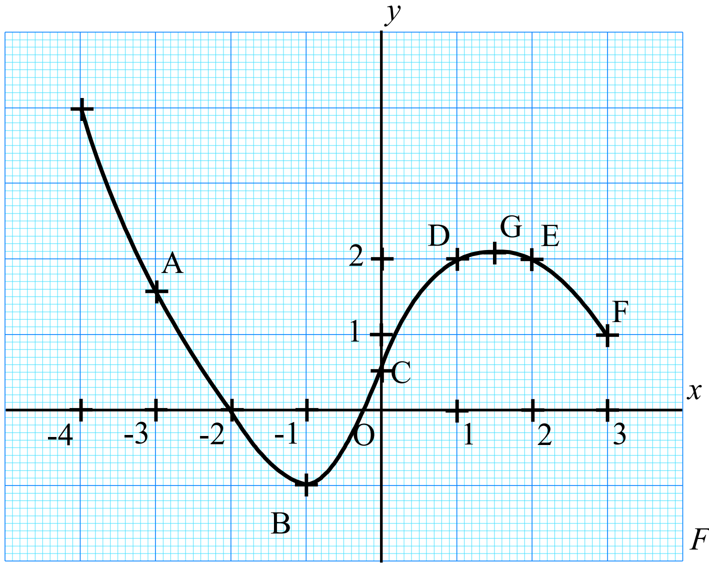


Fig. 4

1. Dresser le tableau de variation de f.

x	.....	.....	.....	.....
$f(x)$	.....		.....	
		.....		.....

2. Soit A, B, C, D, E et F les points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives -3 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 et 3. Déterminer, en justifiant la réponse, les signes de $f'(-3)$, $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$ et $f'(3)$.

3. Dérivée, sens de variation d'une fonction

3. Compléter le tableau suivant :

x	-4		-1		1,5		3
signe de $f'(x)$		...	....	....	.....	.....	

4. Comparer les résultats de ce tableau avec le tableau de variation de la question 1.

....

....

5. Conclusion : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit f' sa dérivée.

Si pour tout x de I, $f'(x)$ est **positive** , alors la fonction f ....

Si pour tout x de I, $f'(x)$ est **négative**, alors la fonction f ....

Si pour tout x de I, $f'(x)$ est **nulle**, alors la fonction f ....

6. Soit la fonction f définie sur l'intervalle [-5 ; 5] par $f(x) = x^3 - 3x + 4$.

Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. Dérivée, sens de variation d'une fonction

7. Soit la fonction g définie sur l'intervalle [0,5 ; 4] par $g\,(x) = x - \dfrac{1}{x}$.
Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

8. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 1.

9. En utilisant les renseignements des questions 7 et 8 et éventuellement en calculant les coordonnées de points supplémentaires, construire la courbe représentative C_g de la fonction g dans le repère orthonormal ci-dessous.

x	0,5	1	2	3	4
$g\,(x)$					

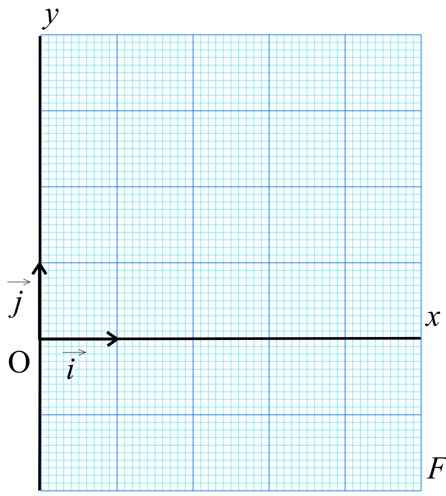


Fig. 5

3. Dérivée, sens de variation d'une fonction

V- Exemple de cinématique

Si $d\ (t)$ est la distance parcourue par un mobile en fonction du temps t, c'est-à-dire $d : t \longmapsto d\ (t)$, alors la vitesse instantanée du mobile à l'instant t est : $v\ (t) = d'\ (t)$ et l'accélération du mobile à l'instant t est : $a\ (t) = v'\ (t)$.

Soit un mobile animé d'un mouvement rectiligne tel que :

$d\ (t) = t^2 + 3\ t$; d en m et t en s.

1. Calculer la distance parcourue aux instants $t = 1$, $t = 2$, $t = 5$ et $t = 10$.

....

....

....

....

2. Calculer la vitesse moyenne entre $t = 2$ et $t = 10$.

....

....

....

3. Calculer la vitesse instantanée du mobile aux instants $t = 2$ et $t = 10$.

....

....

....

....

4. A quel instant t le mobile a-t-il une vitesse instantanée de 15 m/s ?

....

....

....

....

5. déterminer l'accélération du mobile aux instants $t = 2$ et $t = 10$.

....

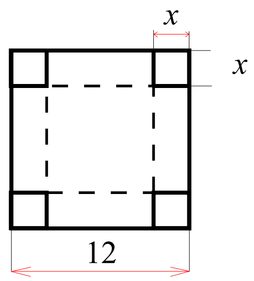
....

....

....

3. Dérivée, sens de variation d'une fonction

VI- Exemple d'optimisation



Une entreprise fabrique des boîtes de forme parallélépipédique sans couvercle. Ces boîtes sont fabriquées à partir de plaques carrées de 12 cm de côté dans lesquelles on découpe dans chaque coin un carré de côté x.

1. Exprimer le volume $V(x)$ de la boîte en fonction de x et préciser l'intervalle possibles pour x.

....

....

....

2. Etudier le signe de $V'(x)$ et dresser son tableau de variation de la fonction $x \longmapsto V(x)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. En déduire la valeur de x pour laquelle le volume de la boîte est maximum.

....

4. Quel est alors, pour cette valeur de x, le volume de la boîte ?

....